

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Nevanlinna, Rolf: Über das Wesen der exakten Forschung. S.-B. Ges. Naturwiss. Marburg 67, 119—149 (1932).

Lichtenstein, L.: La philosophie des mathématiques selon M. Émile Meyerson. Rev. Philos. 113, 169—206 (1932).

Im zweiten Bande des Werkes von É. Meyerson, *Du cheminement de la pensée* (Paris, Alcan, 1931) sind S. 297—459 unter dem Titel „Le raisonnement mathématique“ die Grundzüge einer Philosophie der Mathematik vorgetragen. Zwei Sätze beherrschen diese Philosophie: 1. Die Mathematik ist nicht eine abgeschlossene Disziplin, wie die Logik, sondern eine stetig vorschreitende Wissenschaft. 2. Die Sätze der Mathematik sind gleichwohl von einer Unbezweifelbarkeit, durch die sie unmittelbar an die Sätze der Logik heran- und von den Sätzen aller übrigen vorschreitenden Wissenschaften abgerückt werden. Aus 1. soll folgen, daß die Sätze der Mathematik nicht analytische Urteile sein können. Denn sonst könnten neue mathematische Sätze nicht wesentlich neue Erkenntnisse liefern, und dann würden die Mathematiker an der Mathematik kein Interesse mehr haben: was der Erfahrung widerspricht (§ 280). Die Sätze der Mathematik sind also synthetische Urteile (Kant); aber nicht synthetische Urteile a priori, sondern Sätze, in die gewisse empirische Daten eingehen; denn nicht nur die Grundbegriffe der Geometrie, sondern auch die der Arithmetik sind aus der Erfahrung abstrahiert (§ 241). — Aus 2. soll folgen, daß dieser Empirismus nicht ein radikaler Millischer Empirismus, sondern mit apriorischen Elementen durchsetzt ist. Die Mathematik ist also ein mélange intime d'a priori et d'expérience (§ 243). Wenn ich den Verf. an dieser dunklen Stelle verstanden habe, soll der von Mill übersehene apriorische, für den Evidenzvorzug der Mathematik vor allen übrigen vorschreitenden Wissenschaften verantwortliche Faktor der Mathematik in der durch Perzeptionen angeregten, stetig aufsteigenden, unerschöpflichen Bildung von Idealbegriffen bestehen. Was die Bildung solcher Begriffe mit dem Evidenzvorzug der Mathematik zu tun hat, und inwiefern sie das „Rätsel“ dieses Evidenzvorzuges löst, kann ich nicht sagen. — Fest steht jedenfalls, daß von der Logistik und dem ihm nahe stehenden Hilbertschen Formalismus keine Aufklärung zu erwarten ist. Die Logistik *s'écarte des voies véritables de la pensée* (S. 456). „Le progrès de la pensée y est sacrifié à la rigueur“ (S. XXIII). Nicht einmal den Sinn des $+$ -Zeichens in $7 + 5$ oder $a + b$ hat sie adäquat zu erfassen vermocht (§§ 200ff; vgl. § 279). Die Sterilität der Logistik soll darin bestehen, daß mit ihrer Hilfe bisher noch nicht ein einziges neues mathematisches Theorem entdeckt worden ist (§ 14), und darauf beruhen, daß sie das natürliche Denken in unnatürliche Ketten legt (§ 164). Beweis: la somme formidable d'efforts, die Frege und Russell aufbieten müssen, um auch nur bis zum Begriff der Kardinalzahl zu gelangen (S. 305). Und vor allem: die Logistik, mit ihren narkotisierenden Tautologien, hat nicht einmal die fundamentale Bedeutung des Hankelschen Permanenzprinzips für die vorschreitende Mathematik erkannt (§ 226). Der Logistiker darf hierzu bemerken, daß dieses Prinzip allerdings durch das grundlegende Fregesche Verbot des stückweisen Definierens für ihn aus der Reihe der zur Konkurrenz zugelassenen Prinzipien grundsätzlich ausgeschlossen ist, im Interesse der Strenge und Sauberkeit des Aufbaus, die er jedem noch so stürmischen „Fortschritt“ vorzieht. Er muß ferner sagen dürfen, daß diese angeblich nur auf das Identitätszeichen starrende Logistik nicht nur die erste exakte Interpretation des $+$ -Zeichens geliefert, sondern auch die für jedes punktlche Denken lebenswichtige Unterscheidung der Identität von der Inklusions- und der ε -Beziehung durchgesetzt hat. — Die ausführliche Anzeige des angesehenen Leipziger Mathematikers stellt diese Philosophie der Mathematik in den Rahmen des Meyersonschen Gesamtwerkes hinein und versucht, den dunklen Sinn des apriorischen Faktors der Mathematik durch die Einführung von Intuitionen zu erhellen, die zu gewissen empirischen Anschauungen „isomorph“ sein sollen. Außerdem ist an ihr bemerkenswert die widerspruchsfreie Zustimmung zu dieser Philosophie der Mathematik. Heinrich Scholz (Münster i. W.).

Hedrick, E. R.: Tendencíes in the logic of mathematics. Science 77, 335—343 (1933).

Fraenkel, Adolf: On modern problems in the foundations of mathematics. Scripta Math. 1, 222—227 (1933).

Wisdom, John: Logical constructions. Mind 41, 441—464 (1932); 42, 43—66 u. 186—202 (1933).

Abraham, Leo: Implication, modality and intension in symbolic logic. *Monist* 43, 119—153 (1933).

This paper is a discussion of some matters concerning the philosophical interpretation of such formal systems as the *Principia Mathematica*; it contains no mathematical results. The author maintains that the *Principia Mathematica* gives a definition of implication which is in full accord with ordinary usage, provided that due account be taken of the theory of apparent variables; that the systems of strict implication and the "alternative logics" proposed by C. I. Lewis and some others are superfluous; that material implication introduced in *Principia* *1.01 is the only kind of implication that can hold between propositions; and that all other kinds of implication used in logic can be defined in terms of this and apparent variables, provided that the latter range over all conceivable entities, and not merely over all existent ones.

H. B. Curry (State College, Pennsylvania, U.S.A.).

Wajsberg, M.: Untersuchungen über den Funktionenkalkül für endliche Individuenbereiche. *Math. Ann.* 108, 218—228 (1933).

Eine Formel des Funktionenkalküls, die keine Aussagezeichen und keine Zeichen für bestimmte Individuen oder Funktionen enthält, heißt nach Bernays k -zählig identisch, wenn sie für einen aus k Elementen bestehenden Individuenbereich allgemeingültig ist. Verf. beweist: Aus jeder k -zählig, nicht aber $k + 1$ -zählig identischen Formel folgen alle k -zählig identischen Formeln.

A. Schmidt (Göttingen).

Huntington, Edward V.: A simplification of Lewis and Langford's postulates for Boolean algebra. *Mind* 42, 203—207 (1933).

Huntington, Edward V.: New sets of independent postulates for the algebra of logic, with special reference to Whitehead and Russell's *Principia Mathematica*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 35, 274—304 (1933).

Den in den *Trans. Amer. Math. Soc.* 5 (1904) veröffentlichten drei Axiomensystemen für die Algebra der Logik fügt der Verf. vier neue hinzu. Das letzte (S. 301) soll die Zusammenhänge zwischen der Booleschen Algebra — „name for the calculus originated by Boole, extended by Schröder, and perfected by Whitehead“ — und dem Aussagenkalkül der *Principia Mathematica* aufdecken. Statt „is a proposition“ wird gesagt „is in K “, statt „ \vdash “: „is in T “. Den so umgeschriebenen primitive propositions *1,3, *1,4, *1,6, *1,7, *1,71 der *Principia* fügt Huntington zwei Axiome hinzu, die dem „informalen“ Standpunkt der *Principia* entsprechen sollen: Post. 6: If $a + b$ (a oder b) is in T , then at least one of the elements a and b is in T . Post. 7: If a' (non- a) is in T , then a is not in T . Mit Hilfe der Post. 6 und 7 können die primitive propositions *1,1, *1,2 hergeleitet werden; man hat also (da *1,5 nach Bernays abhängig ist) die ganze Aussagenlogik der *Principia*. Daß Post. 7 von allen primitive propositions *1,1 — *1,71 unabhängig ist, erkennt man bei der Annahme, alle Formeln seien in T . H. zeigt, daß auch Post. 6 von den primitive propositions unabhängig ist; und er weist auf B. A. Bernstein hin, welcher in seiner Kritik der *Principia* (*Bull. Amer. Math. Soc.* 38; dies. Zbl. 5, 146 und 6, 4) behauptete, ein Kalkül, in dem jenes Post. 6 nicht gelte, sei der Aussagenlogik „inadequate“. Bernstein und Huntington übersehen allerdings die Rolle der Substitution in den *Principia*, die z. B. gestattet, aus dem gültigen Satz $\vdash \cdot a \vee \infty a$ mit Hilfe von Post. 6 jede beliebige Formel herzuleiten. — Hervorzuheben ist noch eine Formalisierung der logischen Gleichheit.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Bernstein, B. A.: Remarks on propositions * 1 · 1 and * 3 · 35 of *principia mathematica*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 39, 111—114 (1933).

Algebra und Zahlentheorie.

● Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Bd. 1. Arithmetik, Algebra, Analysis. Ausgearb. v. E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht

und mit Zusätzen versehen v. Fr. Seyfarth. 4. Aufl. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. C. Runge. Bd. 14.) Berlin: Julius Springer 1933. XII, 309 S. u. 125 Abb. RM. 15.—.

● Klein, F.: *Elementary mathematics from an advanced standpoint. Arithmetic, Algebra, Analysis.* London: Macmillan & Co. 1932. X, 274 S. 15/—.

● Perron, Oskar: *Algebra. Bd. 2. Theorie der algebraischen Gleichungen. 2., verb. Aufl. (Göschens Lehrbücherei, Gruppe 1, Bd. 9.)* Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1933. VIII, 260 S. u. 5 Fig. RM. 9.50.

Motzkin, Th., und A. Ostrowski: *Über den Fundamentalsatz der Algebra.* S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 5, 255—258 (1933).

Es sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. Setzt man $z = x + iy$, so ist $P(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, wobei $U(x, y)$ und $V(x, y)$ reelle Polynome sind. Der 1. Gaußsche Beweis des Fundamentalsatzes benutzt die Tatsache, daß es ein $R > 0$ gibt, so daß für jedes $r > R$ die Kurven $U = 0$ und $V = 0$ die Kreislinie $|z| = r$ in je $2n$ einander trennenden Punkten durchsetzen. Mittels recht komplizierter Sätze über algebraische Kurven kann streng (s. Ostrowski, Gauß' Werke X₂, Abh. 3) die Existenz der Schnittpunkte von $U(x, y) = 0$ und $V(x, y) = 0$ erschlossen und damit der Fundamentalsatz bewiesen werden. Verf. zeigen nun durch ganz elementare algebraische und analytische Hilfsmittel: Ist ϱ die untere Grenze aller R mit der obigen Eigenschaft, so liegt auf dem Kreise $|z| = \varrho$ eine Nullstelle von $P(z)$. Damit ist der Fundamentalsatz bewiesen. Wegner (Darmstadt).

Alaci, V.: *Les expressions du reste et du quotient de la division de deux polynômes.* Bull. sci. École polytechn. Timişoara 4, 135—150 (1932).

Es werden die zwei Polynome, die sich als Quotient und als Rest der Division eines Polynoms $f(x)$ mit dem Polynome $g(x) = (\alpha - x)^q$ ergeben, durch die Koeffizienten von $f(x)$ und durch die Zahlen α und q explizit ausgedrückt. Das Problem wird auch für den Fall des Divisors $g(x) = (\alpha_1 - x)^{q_1} \cdot (\alpha_2 - x)^{q_2} \cdot \dots \cdot (\alpha_n - x)^{q_n}$ verallgemeinert. v. Sz. Nagy (Szeged).

La Menza, F.: *Über die Berechnung der einfachen symmetrischen Funktionen, die aus den Wurzeln einer Gleichung gebildet werden können.* Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 7, 231—234 (1932) [Spanisch].

Lahaye, Edm.: *Une méthode de résolution des équations algébriques.* C. R. Acad. Sci., Paris 196, 742—744 (1933).

$$y^p + a_1 y^{p-1} + a_2 y^{p-2} + \dots + a_p = 0 \quad (1)$$

mit vorgegebenen komplexen Zahlen a_k und einfachen Wurzeln soll gelöst werden. Verf. bestimmt eine Zahl k und daraus eine Zahl $\mu > 0$, so daß die kritischen Punkte der algebraischen Funktion:

$$y^p + a_1 t y^{p-1} + a_2 t^2 y^{p-2} + \dots + a_p t^p + k t^p - k = 0 \quad (2)$$

ganz außerhalb eines Parallelstreifens von der Breite 2μ um die Achse der reellen Zahlen liegen. Setzt man $t = -2 \frac{\mu}{\pi} \lg(1 - \delta \tau)$ mit $\delta = 1 - e^{-\pi/2\mu}$, so findet man die Wurzeln von (1), indem man in der nach positiven ganzen Potenzen von τ fortschreitenden für $|\tau| \leq 1$ sicher konvergenten Entwicklung der p verschiedenen Wurzeln von (2) für τ Eins einsetzt. Wegner (Darmstadt).

Misra, D. P.: *The algebraic roots of an algebraic equation.* Tôhoku Math. J. 36, 263—268 (1933).

Unter der Voraussetzung, daß jede ganze rationale algebraische Gleichung eine Lösung besitzt, die durch Wurzelziehen und rationale Operationen aus den Koeffizienten gewonnen werden kann, werden einige weitere Sätze über algebraische Gleichungen hergeleitet. Die Voraussetzung ist aber nach einem berühmten Satz von Abel falsch. van der Waerden.

Berwald, L.: Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. *Math. Z.* **37**, 61–76 (1933).

Auf Grund eines Satzes von L. Fejér über Kosinuspolynome mit konvexen Koeffizientenpolygonen (*Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **38**, 231) leitet der Verf. durch einfache Betrachtungen vier Hilfssätze über gewisse reziproke Gleichungen mit reellen Koeffizienten ab. Ein mit dem Satze von Rouché verwandter Hilfssatz wird ebenso einfach erhalten. Durch Anwendung dieses letzten Hilfssatzes auf die vier ersten erhält der Verf. 7 Sätze über die Anzahl der Nullstellen gewisser reeller Polynome im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises. Drei von diesen Sätzen stehen im engen Zusammenhang mit den Sätzen von St. Lipka (*dies. Zbl.* **1**, 115), einer ist eine Verallgemeinerung des bekannten Eneström-Kakeyaschen Satzes, die übrigen vier Sätze sind mit ihm verwandt. Aus einer anderen hinreichenden Bedingung für das Nichtverschwinden eines Kosinuspolynoms, wie diejenige von Fejér, leitet der Verf. noch einen mit den vorigen verwandten Satz ab. — Ich verweise hier auf die vorigen Referate von mir, *Zbl.* **6**, 5 und 6. Die von Montel durch N ausgedrückte obere Schranke für die absoluten Beträge der Nullstellen eines Polynoms und die für $N = 1$ gültige obere Schranke von Sergescu kommt schon in einer Arbeit von Königsberger vor [*Rend. Circ. mat. Palermo* **26**, 346 (1908)].

v. Sz. Nagy (Szeged).

Lusin, N.: Sur certaines propriétés du multiplicateur inversant dans le procédé de Mr. A. Krylov. *II.* *Bull. Acad. Sci. URSS*, VII. s. Nr **6**, 735–762 (1932) [Russisch].

Lusin, N.: Sur certaines propriétés du multiplicateur inversant dans le procédé de Mr. A. Krylov. *III.* *Bull. Acad. Sci. URSS*, VII. s. Nr **8**, 1065–1102 (1932) [Russisch].

(I. Mitt. vgl. *dies. Zbl.* **6**, 122.) Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit des Verf. „Sur la méthode de Mr. A. Krylov de composition de l'équation séculaire“ (*dies. Zbl.* **4**, 49), in der ein Verfahren betrachtet wurde, mit Hilfe eines „versetzenden“ Faktors M , der von k willkürlichen Parametern a, b, c, \dots, f abhängt, eine Sekulargleichung $\Delta(\lambda) = 0$ auf eine solche Form zu bringen, daß λ nur in der ersten Kolonne steht. In vorliegender Arbeit zeigt der Verf., daß eine lineare Differentialgleichung $D(x) = 0$, die von Krylov eingeführt war, durch eine algebraische Gleichung $D(\lambda) = 0$ ersetzt werden kann. Zu jedem Punkte $P(a, b, c, \dots, f)$ des k -dimensionalen Euklidischen Raumes, d. h. zu jeder Auswahl der Parameter a, b, c, \dots, f gibt es eine einzige Gleichung $D(\lambda) = 0$. Alle Wurzeln dieser Gleichung sind zugleich Wurzeln für die Sekulargleichung $\Delta(\lambda) = 0$. Bei entsprechender Auswahl von Parametern werden aber beliebige vorgeschriebene Wurzeln der Sekulargleichung in der Gleichung $D(\lambda) = 0$ nicht enthalten sein. Als Hilfsmittel dienen sog. charakteristische Eukl. Mannigfaltigkeiten des k -dimensionalen Eukl. Raumes, d. h. solche Eukl. Mannigfaltigkeiten, welche sich bei einer linearen Transformation reproduzieren.

A. Kurosch (Moskau).

Verriest, G.: Sur la construction du groupe de Galois d'une équation donnée. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* **53**, 17–20 (1933).

Severi, F.: Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **17**, 3–10 (1933).

Beweis des folgenden Satzes, der das „Prinzip von Plücker-Clebsch“ als Spezialfall enthält: Es seien $f_1 = 0, \dots, f_r = 0$ r algebraische Gleichungen in r Unbekannten x_1, \dots, x_r , deren Koeffizienten rational von Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ abhängen. Wenn für ein spezielles Wertsystem der λ das Gleichungssystem eine isolierte Lösung besitzt, so ist es für allgemeine Werte der λ lösbar. Der Beweis beruht auf der Kroneckerschen Eliminationstheorie. Ein analoger Satz gilt für Systeme analytischer Gleichungen.

van der Waerden (Leipzig).

Williamson, J.: Sets of semi-commutative matrices. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. **3**, 179–188 (1933).

If ω is a primitive n th root of unity, and if E_1, \dots, E_q form a set of t -rowed matrices satisfying the relations $E_i E_j = \omega E_j E_i$, $E_i^n = E$; $(i, j = 1, 2, \dots, q; i < j)$ (1)

where E is the unit matrix and $t = n^p \tau$, $\tau \not\equiv 0 \pmod n$, then the maximum value of q is $2p + 1$. Moreover, for every value of t , sets of $2p + 1$ matrices satisfying (1) exist. This is a generalisation of a theorem of M. H. A. Newman [J. London Math. Soc. 7, 94 (1932); this Zbl. 4, 195] of R -matrices which are defined to be matrices with elements from the field $R(\omega)$, where R is the field of rational numbers, and if I -matrices are R -matrices multiplied by $\sqrt{\omega}$, then the number of R -matrices in a set E_1, \dots, E_q consisting of R -matrices and I -matrices only, is subject to a further restriction for even values of n . van der Waerden (Leipzig).

Williamson, John: Matrices whose sth compounds are equal. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 108—111 (1933).

Chaundy, T. W.: The vanishing of the Wronskian. J. London Math. Soc. 8, 4—9 (1933).

Aus dem Verschwinden der Wronskischen Determinante der Funktionen y_1, \dots, y_n folgt nach Sätzen von Curtiss und Bocher das Verschwinden gewisser allgemeinerer Determinanten, falls die $n - 1$ -ten Ableitungen der y , stetig sind. Hier wird gezeigt, daß man auf diese Stetigkeitsvoraussetzung verzichten kann; der Beweis beruht auf Fallunterscheidungen und vollständiger Induktion. *Otto Szász* (Frankfurt a. Main).

Chaundy, T. W.: Plane partitions. Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 14—22 (1933).

By his algebra of lattice functions MacMahon obtained generating functions for plane partitions of various types, culminating in the formula $(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}(1-x^3)^{-3} \dots$ for the generating function of unrestricted plane partitions. The analogy of this with Euler's formula $(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \dots$ for the generating function of unrestricted linear partitions has led to the hope that a direct proof of the former might be found analogous to that which is known for the latter. Chaundy here presents a more direct proof of the named formula of MacMahon than those previously given, his analysis resting on the partitions themselves rather than on the algebra of their generating functions. *R. D. Carmichael* (Urbana).

Taketa, Kiyosi: Neuer Beweis eines Satzes von Herrn Furtwängler über die metabelschen Gruppen. Jap. J. Math. 9, 199—218 (1932).

Verf. beweist den Hauptidealsatz für algebraische Zahlkörper neuerdings. Und zwar handelt es sich wie beim Furtwänglerschen Beweis (Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 7) darum, die gruppentheoretische Relation für zweistufige Gruppen nachzuweisen, aus deren Richtigkeit nach E. Artin der Hauptidealsatz folgt. Dies geschieht hier mit Hilfe der monomialen Darstellungen. Zunächst wird ein schwächerer Satz für transitive monomiale zweistufige Gruppen \mathfrak{G} von beliebiger endlicher Ordnung bewiesen: Es sei \mathfrak{A} derjenige abelsche Normalteiler von \mathfrak{G} , der aus allen Elementen von Diagonalform besteht; die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ sei abelsch und die Repräsentanten ihrer Basis seien die Elemente S_1, \dots, S_m mit den Ordnungen v_1, \dots, v_m in bezug auf \mathfrak{A} . Mit S_{m+1} wird ein beliebiges Element von \mathfrak{A} bezeichnet. Wird dann $1 + S_i + \dots + S_i^{v_i-1} = g_i$, $i = 1, \dots, m + 1$, gesetzt, so gilt:

$$S_i^{v_i} g_1 \dots g_{i-1} g_{i+1} \dots g_m = m_{S_i} E,$$

wo m_{S_i} das Produkt von sämtlichen Koeffizienten der monomialen Matrix S_i und $S_i^{S_i}$ das Element $S^{-1} S_i S$ bedeutet. Dieser Satz wird mit Hilfe vollständiger Induktion bewiesen. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ abelsch ist, enthält \mathfrak{A} die Kommutatorgruppe \mathfrak{C} von \mathfrak{G} . Bezeichnen dann S_1, \dots, S_n die Repräsentanten der Basis von $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$, e_1, \dots, e_n ihre Ordnungen in bezug auf \mathfrak{C} , k den Index von \mathfrak{A} in bezug auf \mathfrak{C} , so gilt, wenn unter f_i der Ausdruck $1 + S_i + \dots + S_i^{e_i-1}$ verstanden wird:

$$S_i^{e_i} f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n = m_{S_i}^k E$$

und schließlich $m_{S_i}^k = 1$. Diese letzte Beziehung ergibt leicht die Richtigkeit des Hauptidealsatzes für abstrakte Gruppen und ist natürlich der schwierigste Punkt des

Beweises. Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ abelsch ist, trifft im allgemeinen nicht zu, doch läßt sich zeigen, daß es eine zu \mathfrak{G} äquivalente Gruppe gibt, welche diese Eigenschaft erfüllt. Eine beliebige monomiale Gruppe läßt sich nämlich so transformieren, daß die Elemente eines vorgegebenen abelschen Normalteilers Diagonalmatrizen werden, während die Gesamtgruppe monomial bleibt. Zweistufige Gruppen lassen sich also insbesondere so transformieren, daß die Elemente der Kommutatorgruppe Diagonalmatrizen werden. Die Faktorgruppe nach dem Normalteiler aller Elemente von Diagonalform ist dann abelsch. Tausisky (Wien).

Levi, Friedrich: Über die Untergruppen der freien Gruppen. II. Math. Z. 37, 90 bis 97 (1933).

1. Eine unendliche Folge von Untergruppen einer freien Gruppe \mathfrak{F} , deren jede in der vorhergehenden charakteristische Untergruppe ist, besitzt den Durchschnitt 1; eine charakteristische Untergruppe von \mathfrak{F} , die die Kommutatorgruppe \mathfrak{F}' von \mathfrak{F} enthält, wird von \mathfrak{F}' und den m -ten Potenzen der Elemente von \mathfrak{F} erzeugt. 2. Eine Untergruppe heißt vollinvariant, wenn sie bei allen (beliebig-stufigen) Automorphismen der Gesamtgruppe invariant bleibt; sie ist dann notwendig charakteristisch, aber nicht umgekehrt. In einer freien Gruppe \mathfrak{F} erhält man Erzeugende für alle vollinvarianten Untergruppen \mathfrak{U} , indem man aus beliebigen Symbolen z_i, z_i^{-1} ein System von „nicht kürzbaren“ Worten Z_k bildet, und in den Z_k für die z_i, z_i^{-1} sukzessive alle Elemente von \mathfrak{F} bzw. deren Reziproke einsetzt. Man kann unter den Z_k stets mindestens eines $\neq 1$ so wählen, daß in ihm höchstens zwei verschiedene $z_i^{\pm 1}$ auftreten (falls $\mathfrak{U} \neq 1$). Der Durchschnitt endlich vieler $\mathfrak{U} \neq 1$ sowie der Durchschnitt einer zu keinem \mathfrak{U} fremden Untergruppe mit einem beliebigen \mathfrak{U} ist nur für kommutatives \mathfrak{F} kommutativ. 3. Sind b_1, \dots, b_m endlich viele Elemente aus \mathfrak{F} , so gibt es in der formal aus b_1, \dots, b_m gebildeten freien Gruppe einen Automorphismus $b_\mu \rightarrow \beta_\mu$, derart, daß β_1, \dots, β_r ($r \leq m$) freie Erzeugende der von b_1, \dots, b_m erzeugten Untergruppe von \mathfrak{F} sind. $m - r$ ist die Minimalzahl der zwischen den b_μ in \mathfrak{F} bestehenden erzeugenden Relationen. Magnus.

Frasch, Hermann: Die Erzeugenden der Hauptkongruenzgruppen für Primzahlstufen. Math. Ann. 108, 229–252 (1933).

Die Hauptkongruenzgruppe \mathfrak{S}_p wird gebildet von den Substitutionen der inhomogenen Modulgruppe \mathfrak{S}_1 , die mod. der Primzahl p der identischen Substitution kongruent sind; ihre Faktorgruppe \mathfrak{M}_p in \mathfrak{S}_1 besitzt die Ordnung $\frac{1}{2}p(p-1)$. Erzeugende und Relationen von \mathfrak{S}_p lassen sich aus denen von \mathfrak{S}_1 nach dem Verfahren von Reidemeister und Schreier [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5, 7 u. 161 (1927)] nach Aufstellung eines Repräsentantensystems in \mathfrak{S}_1 für die Elemente von \mathfrak{M}_p angeben. Dabei lassen sich die auftretenden Relationen zur Elimination überzähliger Erzeugender verwenden, so daß \mathfrak{S}_p für $p > 3$ freie Gruppe von $1 + \frac{1}{12}p(p^2-1)$ Erzeugenden wird, die an Hand des Eliminationsverfahrens explizit konstruierbar sind. Die Elimination selber wird verhältnismäßig übersichtlich, indem die Repräsentanten von \mathfrak{M}_p gemäß der Schreierschen Bedingung (F) (l. c. 177) gewählt werden. Ein Resultat von H. Rademacher [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 7, 134 (1930)] über Erzeugende gewisser Kongruenzuntergruppen von \mathfrak{S}_1 läßt sich hieraus neu ableiten, ebenso eine Definition von Bussey [Proc. London Math. Soc. (2), 3, 296 (1905)] von \mathfrak{M}_p durch Erzeugende und definierende Relationen. Der Satz über die Erzeugendenanzahl von \mathfrak{S}_p ist Spezialfall des folgenden: Eine Untergruppe \mathfrak{A} vom Index j in der Gruppe \mathfrak{G} mit k Erzeugenden A_σ , m Erzeugenden B_σ und den definierenden Relationen $A_\sigma^{a_\sigma} = 1$ wird, falls sie keine von eins verschiedenen Transformierten einer Potenz von A_σ enthält (andernfalls ergeben sich leicht angebbare Modifikationen), von

$$1 + j(k + m - 1) - \sum_{\sigma=1}^k j/a_\sigma$$

freien Erzeugenden erzeugt. Dies wird auch mit Hilfe des Klein-Dyckschen Gruppenbildes von \mathfrak{G} in der hyperbolischen Ebene bestätigt. Magnus (Frankfurt a. M.).

Hensel, Kurt: Über die Ausführbarkeit der elementaren Rechenoperationen in Ringen von Systemen. *J. reine angew. Math.* **169**, 67—70 (1933).

Es sei \mathfrak{R} ein Ring aus Matrizen A, B, \dots , deren Elemente einem Integritätsbereich mit verallgemeinertem euklidischen Algorithmus angehören, so daß die Elementarteilertheorie wie für ganzzahlige Matrizen gilt. Unter Benutzung dieser Elementarteilertheorie wird gezeigt: Die Gleichung $AX = B$ (und entsprechend $YA = B$) besitzt dann und nur dann eine Lösung in \mathfrak{R} , wenn die Äquivalenz $(A, B) = (A)$ besteht — d. h. wenn die quadratischen Matrizen $\begin{pmatrix} AB \\ 00 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} AO \\ 00 \end{pmatrix}$ im üblichen Sinn äquivalent sind. Zugleich wird dann die allgemeinste derartige Lösung angegeben, wenigstens für den Fall von Körperelementen. E. Noether (Göttingen).

Bush, L. E.: On Young's definition of an algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 142 bis 148 (1933).

Die übliche Definition einer Algebra benutzt bei der Erklärung der skalaren Multiplikation einen im allgemeinen nicht in der Algebra enthaltenen kommutativen Körper. Um sich von dieser Bezugnahme auf ein fremdes System zu befreien, definierte Young, *Ann. of Math.* (2) **29**, 54—60 (1927/1928) eine Algebrenklasse, deren Axiome Operationen lediglich innerhalb der Algebren verwenden; doch war die so definierte Klasse weiter als die gewöhnliche. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, welche Postulate zu den Youngschen hinzutreten müssen, um die Youngsche Algebrenklasse auf die gewöhnliche zu reduzieren. Grell (Jena).

Paley, R. E. A. C.: Theorems on polynomials in a Galois field. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. **4**, 52—63 (1933).

Die Arithmetik im Ring der Polynome einer Veränderlichen über einem Galoisfeld zeigt bekanntlich große Ähnlichkeit mit der gewöhnlichen Zahlentheorie. Daher können viele Sätze übertragen werden (oft sogar unter Vereinfachung der Beweise und Aussagen, vgl. dazu noch Carlitz, dies. Zbl. **1**, 124 und **5**, 387). Das gilt auch für das Waring'sche Theorem von der Darstellbarkeit einer Zahl als Summe von n -ten Potenzen. In ausgezeichneten Fällen können sogar bestimmte Aussagen über die Anzahl der erforderlichen Potenzen gemacht werden. Brandt (Halle).

Zahlentheorie:

Borel, Émile: Sur un problème élémentaire de probabilités et la quasi périodicité de certains phénomènes arithmétiques. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **196**, 881—882 (1933).

L'auteur considère le problème suivant: quelle est la probabilité P_n pour que dans la suite des n chiffres d'un nombre, écrit dans le système de numération de base β , figurent au moins une fois deux chiffres consécutifs dont le second soit égal au premier augmenté d'une unité. On obtient aisément une équation aux différences finies en P_n . L'équation caractéristique de cette équation a des racines réelles et imaginaires; il s'introduit ainsi dans la formule générale donnant P_n , à côté d'un terme exponentiel, des termes quasi périodiques. Suivant l'opinion de l'auteur il existe une certaine analogie entre la solution de ce problème élémentaire et celle de la répartition des nombres premiers. A. Kolmogoroff (Moskau).

Tortorici, Pietro: Sulla contrazione e sulla distensione dei numeri naturali secondo Kolovrat. *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. **70**, 190—195 (1932).

Bekanntlich ist es möglich, zwischen Zahlengruppen von gleichbleibender und auch von beliebig wechselnder Anzahl und der natürlichen Zahlenreihe eine ein-eindeutige Zuordnung herzustellen. Die zumeist angewendeten Zuordnungsverfahren haben den Nachteil, daß die wirkliche Herstellung der einer Zahl entsprechenden Zahlengruppe oder umgekehrt nur möglich ist, indem man alle vorhergehenden Paare bildet. Es wird nun hier nach einem Gedanken von Kolovrat [*Atti Congr. intern. Bologna* **2**, 211 (1928)] eine Zuordnung gebildet, bei der dieser Übelstand vermieden ist. Als Hilfsmittel dient dabei die dyadische Darstellung der Zahlen. Die Zuordnung zwischen Zahlen und Zahlengruppen erfolgt durch eine Art zyklische Aufteilung der

Ziffern (distensione, Ausstreckung; umgekehrt contrazione, Zusammenziehung), während die Beziehung zur Anzahl der Zahlen in der Zahlengruppe mit der Anzahl der Endnullen in der dyadischen Darstellung in Verbindung gebracht wird.

L. Schrutka (Wien).

Schur, I.: Ein Beitrag zur elementaren Zahlentheorie. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 3/4, 145–151 (1933).

Let a be an integer and p a prime. This paper deals a series of numbers $a_n^{(0)}$ and its derived series $a_n^{(m)}$ which are defined as follows

$$a_n^{(0)} = a^{p^n},$$

$$a_n^{(m)} = \frac{a_{n+1}^{(m-1)} - a_n^{(m-1)}}{p^{n+1}}.$$

The statements that a'_0 and a'_{n-1} are integers are respectively equivalent to Fermat's theorem that $a^p - a$ is divisible by p , and its generalization: $a^{p^n} - a^{p^{n-1}}$ is divisible by p^n . This paper gives the proofs of the following generalizations of Fermat's theorem. — I. Let a be prime to p . Then $a_n^{(m)}$ is an integer for every n provided $m < p$. There exist some values of a and n for which $a_n^{(p)}$ is not an integer. — For the case $m = p$ we have more definite results as follows: II. Let p^h be the highest power of p dividing $a^{p-1} - 1$. If $h > 1$ then $a_n^{(p)}$ is an integer for every n . If $h = 1$ and $p = 2a_n^{(2)}$ is an integer for $n > 0$ while $a_0^{(2)}$ is a fraction with denominator 2. For $h = 1$ and $p > 2$, $a_n^{(p)}$, for all n , is a fraction with denominator p . — As a generalization of II for the case $p = 2$ we have: II'. If $p = 2$ and $a = 4x + 1$, then $a_n^{(m)}$ is an even integer for all values of m and n . If $a = 4x - 1$, then $a_n^{(m)}$ is an even integer for all m and all $n > 0$. For $n = 0$, however, $a_0^{(m)}$ is a fraction whose numerator is odd and whose denominator is 2^{m-1} . — The method of proof depends on the expansion of $a_n^{(m)}$ as a polynomial in p whose coefficients involve the Gauss polynomial

$$\frac{(1-p^m)(1-p^{m-1}) \dots (1-p^{m-\mu+1})}{(1-p)(1-p^2) \dots (1-p^\mu)}.$$

D. H. Lehmer (Altadena, California).

Lehmer, D. H.: Some new factorizations of $2^n \pm 1$. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 105–108 (1933).

Der Verf. hat sich eine zahlentheoretische Maschine zusammengestellt, sehr kurz beschrieben in Bull. Amer. Math. Soc. 38, 635. Sie gibt u. a., automatisch, nach geeigneter Einstellung, die kleinste Lösung einer Anzahl vorgegebenen linearen Kongruenzen mit Primzahlmoduln. Sie scheint eine Verbesserung und Erweiterung zu sein einer früher vom Verf. zusammengestellten Maschine (Amer. Math. Monthly 35, 114). Der Verf. hat nun seine Maschine während eines Monats in Gebrauch und berichtet über die damit erreichte Zerlegung einiger 19-stelliger Zahlen der Form $(2^n \pm 1)$: d in Primfaktoren. Dabei benutzt er seinen Satz: Wenn N ein Teiler ist von $\alpha^{N-1} - 1$, aber nicht von $\alpha^{(N-1):p} - 1$, p eine Primzahl, so haben alle Primfaktoren von N die Form $px + 1$. Dieser ist ein spezieller Fall eines etwas allgemeineren Satzes des Verf. (Bull. Amer. Math. Soc. 33, 331). Wenn eine geeignete Primzahl p gefunden werden kann, liefert dieser Satz eine lineare Form $px + 1$ für die Faktoren von N und daher eine lineare Form $p^2 y + r$ für die Zahl a aus $N = a^2 - b^2$. Dadurch wird die Berechnung einer Darstellung $N = a^2 - b^2$ erleichtert. 244363342366 (letzte Zeile S. 105) muß 24436334266 sein; 2 24958 286426 ... (S. 107) muß 2 24958 28426 ... sein.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Fitting, F.: Die Komponenten magischer Quadrate und ihre Verwendung zur Konstruktion solcher Quadrate. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 254–265 (1933).

Es sei $n^2 = f_1 f_2 \dots f_r$, so kann man alle Zahlen $m = 0, 1, 2, \dots, n^2 - 1$ eines mag. Quadrats Q eindeutig in der Form $1 \cdot \varphi_m^{(1)} + f_1 \varphi_m^{(2)} + \dots + f_1 f_2 \dots f_r \varphi_m^{(r)}$ darstellen, wo $\varphi_m^{(i)}$ alle Werte $0, 1, \dots, f_i - 1$ annimmt. Bedeutet nun $Q_m^{(i)}$ das von den Zahlen $\varphi_m^{(r)}$, $m = 0, 1, \dots, n^2 - 1$ gebildete Quadrat, so erhält man für Q die Zer-

legung $Q = 1 \cdot Q_m^{(1)} + f_1 Q_m^{(2)} + \dots + f_1 f_2 \dots f_r Q_m^{(r)}$. Die Reihe der Quadrate $Q_m^{(i)}$ nennt der Verf. die Komponentenzerlegung von Q nach dem Faktorensystem f_1, f_2, \dots, f_r . Bildet man die neuen Quadrate $M_1 = 1 \cdot Q_m^{(1)}, M_2 = 1 \cdot Q_m^{(1)} + f_1 Q_m^{(2)}$ usw. und prüft sie der Reihe nach daraufhin, ob sie in allen Reihen, Kolonnen und in den beiden Diagonalen die magische Summe haben, so sei dies zum erstenmal der Fall bei M_r , dann bei M_{r_2} usw. Die Komplexe $(Q_m^{(1)}, Q_m^{(2)}, \dots, Q_m^{(r_1)})$, $(Q_m^{(r_1+1)}, \dots, Q_m^{(r_2)})$, ... nennt der Verf. die Primterme der Komponentenzerlegung. Um nun aus einem gegebenen Q neue mag. Quadr. abzuleiten, werden zwei Sätze bewiesen: Jede Permutation der Primterme führt zu einem neuen mag. Quadr. und: Ersetzt man alle Zahlen a aller Quadr. einer beliebigen Anzahl von Primtermen durch ihre komplementären Zahlen $f_i - 1 - a$, so entsteht ein neues mag. Quadr. Beispiele und Anzahlbestimmung.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Davenport, H.: On the distribution of quadratic residues (mod p). II. J. London Math. Soc. 8, 46–52 (1933).

Ist $f(x)$ ein Polynom n -ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, p eine Primzahl, $\left(\frac{a}{p}\right)$ das Legendresche Symbol, $\left(\frac{0}{p}\right) = 0$, so wird $\varphi_f = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{f(x)}{p}\right)$ für großes p untersucht.

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 1, 123) sind Fälle $n = 3, 4$ behandelt. Durch Kombination einer neuen Methode mit Sätzen, welche nächstens von Mordell in der Math. Z. publiziert werden, wird jetzt bewiesen für $n = 7$ (oder $n = 8$, wenn $f(x)$ wenigstens eine rationale Nullstelle hat): $\varphi_f = O\left(\frac{19}{p^{20}}\right)$. (Vgl. dies. Zbl. 4, 201.)

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Moriya, M.: Über die Fermatsche Vermutung. J. reine angew. Math. 169, 92–97 (1933).

Verf. betrachtet die Fermatsche Gleichung $x^{2k} + y^{2k} + z^{2k} = 0$, wo l eine ungerade Primzahl, k eine natürliche Zahl, x, y, z nicht verschwindende ganze rationale Zahlen sind. Er beweist mit Hilfe einer Landauschen Methode (Vorlesungen über Zahlentheorie 3, 315–319) einige Aussagen, aus denen der Satz von Maillet folgt, welcher besagt, daß die obige Gleichung für hinreichend großes k nicht mehr erfüllt sein kann. Diese Aussagen sind folgende: Es sei $l > 3$; wenn die Gleichung erfüllt ist, so gilt $2^{l-1} \equiv 3^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}$, falls l nicht in $x \cdot y \cdot z$ aufgeht; ferner gilt dann $2^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^{k+1}}$, wenn die Primzahl r in x aufgeht und l in x nicht aufgeht oder wenn r in $x - y$ aufgeht und l in $x^2 - y^2$ nicht aufgeht. Petersson (Hamburg).

Nagell, Trygve: Über diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten. Norsk mat. Tidsskr. 15, 1–14 (1933) [Norwegisch].

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Theorie der Diophantischen Gleichungen der Form $f(x, y) = 0$, wo $f(x, y)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten bezeichnet, namentlich mit Berücksichtigung der neuesten grundlegenden Ergebnisse von Maillet, Siegel, Mordell, Weil, Delaunay und Verf. Myrberg (Helsinki).

Nagell, Trygve: Über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$. Ark. Mat. Astron. Fys. 23 B, Nr 6, 1–5 (1933).

It is well known that the equation

$$x^2 - Dy^2 = -1 \quad (1)$$

is solvable in integers x and y if and only if the period of the regular continued fraction representing \sqrt{D} has an odd number of terms. No other necessary and sufficient condition for the solvability of (1), for a general D , is known. The condition (A) D is the sum of two relatively prime squares is necessary (if D has no square factor) but not sufficient. — Let $C(x)$ denote the number of numbers $D < x$ which satisfy (A) but for which (1) is not solvable. This paper shows that for all sufficiently large x

$$C(x) > c \sqrt{x},$$

where c is a positive constant, by actually exhibiting quadratic formulas for numbers D for which the continued fraction representing \sqrt{D} has two terms in the period. There is also given a table of values of $C(x)$ for $x = 100, 500$, and every thousand up to 10000. $C(10000) = 290$. The number of D 's less than x for which (1) is solvable is also tabulated for the same values of x as well as the number of D 's for which (A) is satisfied.

D. H. Lehmer (Altadena, California).

Veselý, Václav: Une démonstration élémentaire de l'identité de Hurwitz. Čas. mat. fys. 62, 117–122 u. franz. Zusammenfassung 122 (1933) [Tschechisch].

Für diese für den Beweis des Waringschen Satzes grundlegende Identität wird eine elementare (mit den Beweisen von Stridsberg-Remak-Frobenius-Oppenheim verwandte) Beweisaneinanderstellung angegeben.

Jarník (Praha).

Veselý, Václav: Sur un problème analogue à celui de Waring. Čas. mat. fys. 62, 123–127 u. franz. Zusammenfassung 127 (1933) [Tschechisch].

Zu jedem ganzen $k > 0$ gibt es ein ganzes $s > 0$, so daß sich jede ganze positive Zahl als Summe von höchstens s Summanden $\pm x^k$ ($x > 0$ ganz) darstellen läßt. Für diesen Satz (der freilich schwächer ist als der Waringsche Satz) wird ein einfacher direkter Beweis angegeben.

Jarník (Praha).

Wright, E. Maitland: The representation of a number as a sum of five or more squares. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 37–51 (1933).

Das Waringsche Problem für Quadrate besteht bekanntlich in der Untersuchung der diophantischen Gleichung $n = m_1^2 + \dots + m_s^2$, wo n und s gegebene natürliche Zahlen sind und m_1, \dots, m_s gesucht werden. Die interessanteste Frage ist, ob bei gegebenem s für alle großen n Lösungen vorhanden sind und wie groß deren Anzahl asymptotisch ist. — Verf. untersucht dieses Problem, indem er noch die Bedingung hinzufügt, daß $m_i^2 : n$ mit wachsendem n einem positiven Limes λ_i zustrebt, genauer gesagt, beweist er den folgenden Satz: Ist $s \geq 5$ ganz, $\beta < \min\left(\frac{s-4}{3s-4}, \frac{s-2}{2(2s-1)}\right)$ und sind s positive Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$ gegeben, so gibt es zu jedem n m_1, \dots, m_s mit $n = m_1^2 + \dots + m_s^2$, $m_i^2 - \lambda_i n = O(n^{1-\beta})$ für $1 \leq i \leq s$. Wird die letztgenannte O -Bedingung explizit mit Konstanten formuliert, so ergibt sich auch eine asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen. — Der Beweis knüpft an die Hardy-Littlewood-Vinogradoff'schen Methoden an.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Turski, Stanislas: Sur la décomposition de nombres entiers en sommes de carrés de nombres impairs. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 70–71 (1933).

Jede ganze Zahl kann in eine Summe von höchstens 10 Quadraten ungerader Zahlen zerlegt werden. Die obere Schranke 10 kann nicht mehr verkleinert werden.

Hofreiter (Wien).

Pall, Gordon: The structure of the number of representations function in a positive binary quadratic form. Math. Z. 36, 321–343 (1933).

f sei eine positive, primitive, binäre, ganzzahlige, quadratische Form, n eine ganze Zahl. Es wird die Darstellungsfunktion $f(n)$ studiert. f_0, f_1, \dots, f_{h-1} mögen die Formen mit der Diskriminante d repräsentieren. Es werden die Dirichletsche Darstellungsfunktion $\varrho(n) = \sum_{i=0}^{h-1} f_i(n)$ auch für den Fall, daß $(n, d) \neq 1$ ist, ferner 4 verwandte Funktionen diskutiert. Es wird die Darstellung einer Primzahl und eines Produktes von 2 Primzahlen besprochen, dabei spielt die Komposition der Formen mit gegebenem d eine große Rolle. Eine Funktion $f(n)$ heißt reduzibel, wenn 1. $f(1) \neq 0$ und wenn 2. $f(p^a \cdot m) = \psi(p, a) \cdot f(m)$ für jede positive, zu p prime Zahl m gilt. (p Primzahl, a ganz.) Es werden Reduktionsformeln für $f(p^a \cdot m)$ abgeleitet, wobei p zu d teilerfremd bzw. nicht teilerfremd ist. Es werden Darstellungsfunktionen aufgestellt für den Fall, daß die Abelsche Gruppe $\{f_0, \dots, f_{h-1}\}$ ein Basiselement hat, und es werden einige weitere einfache Fälle behandelt.

Hofreiter (Wien).

Woude, W. van der: Über eine algebraische Aufgabe bei der Reduktion von Abelschen Integralen auftretend. II. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **36**, 32—40 (1933).

Die Aufgabe lautete: Gegeben sind drei linear-unabhängige quadratische Formen φ, ψ, χ . Gefragt wird erstens, welche Beziehung zwischen ihren Koeffizienten bestehen muß, damit es möglich sei, jede von ihnen mit dem Quadrat einer Linearform zu multiplizieren, derart, daß die entstehenden biquadratischen Formen einem Formenbüschel angehören, welches auch ein vollständiges Quadrat τ enthält; zweitens wird verlangt, die genannten Linearformen und τ zu bestimmen. Die Aufgabe wurde in der ersten Mitteilung (Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **1931**, 1264; dies. Zbl. **4**, 52) unter der Annahme gelöst, daß τ zwei verschiedene doppelte Nullstellen hat; jetzt wird aber angenommen, daß τ die vierte Potenz einer Linearform ist. Die gesuchte Beziehung wird wieder in algebraischer und in geometrischer Form gegeben.

van der Waerden (Leipzig).

Pipping, Nils: Arithmetische Kriterien für reelle algebraische Zahlen. Sonderdruck aus: Acta Acad. Åboens. **7**, H. 4, 32 S. (1933).

Verf. zeigte in einer früheren Arbeit [Acta Acad. Åboens **1**, 1 (1921)] folgenden Satz: Sei ω eine positive Zahl. Aus dem Zahlensystem $S_0^{(1)} = (1, \omega, \dots, \omega^n)$ lassen sich n Systeme $S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, \dots, S_1^{(n)}$ ableiten, indem man in $S_0^{(1)}$ alle Zahlen außer der größten unverändert läßt, von der größten aber einzeln jede der anderen abzieht. Durch dasselbe Verfahren gehen aus jedem der Systeme $S_1^{(v)}$ n neue Systeme hervor, insgesamt n^2 Systeme $S_2^{(v)}$ ($v = 1, 2, \dots, n^2$). Dies Verfahren läßt sich fortsetzen. Es bricht ab, wenn in einem System $S_\mu^{(v)}$ einmal die Null oder zwei gleiche Elemente vorkommen: dies tritt dann und nur dann ein, wenn ω algebraisch höchstens vom Grad n ist. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob man mit Teilsystemen auskommen kann. Nach Viggo Brun bricht für Zahlen 2. Grades die Folge der Systeme S_μ ab, wo $S_{\mu+1}$ aus S_μ hervorgeht, indem man von seinem größten Element das nächstgrößte abzieht. Verf. bildet entsprechend für Zahlen 3. Grades aus jedem System $S_\mu = (a, b, c, d)$ mit $a > b > c > d$ ein neues System $(a - b, b, c, d)$ für $c + d - b < 0$ und zwei neue Systeme $(a - b, b, c, d)$ und $(a, b, c + d - b, d)$ für $c + d - b \geq 0$ und zeigt das Abbrechen der Folge dieser Systeme $S_\mu^{(v)}$. Die Arbeit enthält eine Menge interessanter durchgerechneter Zahlenbeispiele.

K. Mahler.

Skolem, Th.: Ein allgemeines quadratisches Reziprozitätsgesetz in denjenigen algebraischen Zahlkörpern, worin 2 voll zerfällt. Comment. math. helv. **5**, 305—318 (1933).

Verf. definiert für solche algebraische Zahlkörper, in denen 2 voll zerfällt, Jacobische Symbole auch für den Fall, daß der „Nenner“ des Symbols zu 2 nicht prim ist, indem er für ein ganzes Ideal \mathfrak{a} und eine ganze zu \mathfrak{a} prime Zahl α setzt: $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{a}\right)$, wo a der zu 2 prime Bestandteil von \mathfrak{a} ist und $\left(\frac{\alpha}{a}\right)$ das Jacobische Symbol im üblichen Sinne bedeutet. Es sei nun k der Körper der rationalen Zahlen und es werde für zwei teilerfremde ganze rationale Zahlen a, b das Symbol (a, k, b) definiert durch die Gleichung

$$(a, k, b) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{b}{a}\right) (-1)^{\frac{\text{sign. } a-1}{2} \cdot \frac{\text{sign. } b-1}{2}},$$

wo rechterhand die auf den rationalen Zahlenkörper bezüglichen erweiterten Jacobischen Symbole stehen. Ferner sei K ein Zahlkörper n -ten Grades, in dem 2 voll zerfällt, und es werde in entsprechender Weise mittels der auf K bezüglichen erweiterten Jacobischen Symbole für zwei relativ prime ganze Zahlen α, β aus K das Symbol (α, K, β) definiert durch die Gleichung

$$(\alpha, K, \beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) (-1)^{s \frac{\text{sign. } \alpha-1}{2} \cdot \frac{\text{sign. } \beta-1}{2}}.$$

Das Ziel der Arbeit ist der Nachweis, daß sich jedes Symbol (α, K, β) als Produkt von n „Komponentensymbolen“ (a_i, k, b_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) darstellen läßt, die den n Primidealfaktoren \mathfrak{l}_i von 2 zugeordnet sind. Die Art, wie die a_i, b_i zu berechnen sind, wenn der Körper K und die Zahlen α, β gegeben sind, wird genau beschrieben. Wie zu erwarten, ist das Resultat ein wenig umständlich. Bessel-Hagen (Bonn).

Cramer, W.: Die Reziprozitätsformel für Gauss'sche Summen in reell quadratischen Zahlkörpern. Breslau: Diss. 1932. 27 S.

Latimer, C. G.: On the class numbers of a cyclic field and a sub-field. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 115—118 (1933).

Für absolut-zyklische algebraische Zahlkörper wird folgender Satz bewiesen: Enthält die Diskriminante jedes Unterkörpers mit Ausnahme des rationalen Zahlkörpers einen Primfaktor, der im Grad des Gesamtkörpers nicht aufgeht, so ist die Klassenzahl jedes Unterkörpers in der Klassenzahl des Gesamtkörpers enthalten. Die Klassenteilung ist dabei im engeren Sinne zu verstehen. Dieser Satz steht in gewissem Zusammenhange mit dem Kummerschen Satz, daß für 2 Unterkörper K und k des Körpers der l -ten Einheitswurzeln (l ungerade Primzahl) mit den Klassenzahlen H und h aus $K > k$ die Relation $H \equiv 0(h)$ folgt. Verf. macht die Bemerkung, der Kummersche Satz sei noch nicht bewiesen, da Furtwängler seinem Beweis (J. reine angew. Math. **134**) die Klassenzahl im engeren Sinne zugrunde gelegt hat. Hierzu ist zu sagen, daß sich bereits der Furtwänglersche Beweis ohne weiteres auch auf den Fall der gewöhnlichen Klassenteilung anwenden läßt, wenn man übliche klassenkörpertheoretische Schlüsse zu Hilfe nimmt. Überdies ist inzwischen ein weiterer Beweis des Kummerschen Satzes von J. Herbrand [J. Math. pures appl. **11**, 417—441 (1932); dies. Zbl. **6**, 8] erschienen. Taussky (Wien).

Porusch, J.: Die Arithmetik in Zahlkörpern, deren zugehörige Galois'sche Körper spezielle metabelsche Gruppen besitzen, auf klassenkörpertheoretischer Grundlage. Math. Z. **37**, 134—160 (1933).

Die Arithmetik in nicht Galois'schen, jedoch auflösbaren Körpern kann mit klassenkörpertheoretischen Hilfsmitteln behandelt werden. Dies wird hier an denjenigen Zahlkörpern K von Primzahlgrad durchgeführt, deren zugehörige Galoiskörper N eine zweistufige Gruppe mit zyklischer Faktorgruppe der Kommutatorgruppe besitzen. Die Kommutatorgruppe habe auch die Ordnung l und sei der einzige abelsche Normalteiler. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung des Falles der kubischen Zahlkörper, deren Arithmetik eingehend von Hasse (Math. Z. **31**) untersucht worden ist. Ist C derjenige Unterkörper von N , der zur Kommutatorgruppe der Gruppe von N gehört, so lassen sich die Zerlegungsgesetze der rationalen Primzahlen in K durch C und die Idealgruppe H in C , für welche N Klassenkörper über C ist, bestimmen. C und H werden als Invarianten des Körpers K bezeichnet, weil sie ihn, abgesehen von seinen konjugierten eindeutig festlegen. Für die Frage, wie die Idealgruppe H in C gewählt werden muß, damit der zugehörige Klassenkörper Galoiskörper eines auflösbaren Körpers von Primzahlgrad ist, werden 2 Kriterien gegeben: I. H , aber keine Klasse $\neq H$ ist invariant gegenüber den Automorphismen von C . II. H ist invariant gegenüber den Automorphismen von C und enthält alle Ideale aus echten Unterkörpern von C . Während die 1. Forderung in Kriterium II bei kubischen Körpern überflüssig war, ist sie im allgemeinen Fall nicht entbehrlich. — Verf. diskutiert die Möglichkeiten der Zerlegung der rationalen Primzahlen in K , C und N und die Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen der Primideale in N . Es wird bewiesen, daß jede der als möglich angegebenen Untergruppenreihen wirklich auftritt, d. h. daß man in C geeignete Idealgruppen H finden kann, so daß die Primideale im Klassenkörper N zu H diese Untergruppenreihen besitzen. Diese Idealgruppen werden explizit konstruiert. Taussky.

Grunwald, Wilhelm: Ein allgemeines Existenztheorem für algebraische Zahlkörper. J. reine angew. Math. **169**, 103—107 (1933).

Für ein schon früher bewiesenes Existenztheorem des Verf. (vgl. dies. Zbl. **5**, 51) wird ein vereinfachter Beweis skizziert und eine Folgerung formuliert, welche im Spezialfall der zyklischen Körper ein für die Theorie der Algebren überaus wichtiges Existenztheorem ergibt: Zu jedem endlichen algebraischen Zahlkörper k und einem System von beliebigen endlich vielen Primstellen \mathfrak{p}_i in k gibt es unendlich viele zyklische Oberkörper von beliebigem vorgegebenem Relativgrad m , in welchen die \mathfrak{p}_i in Prim-

stellen von vorgegebenen Relativordnungen e_t und vorgegebenen Relativgraden f_t zerfallen. e_t, f_t müssen dabei nur den folgenden Bedingungen genügen: a) $e_t f_t \mid m$, b) für endliche p_t ist der zu p_t prime Bestandteil von e_t durch $N(p_t) - 1$ teilbar, c) ist p_t unendlich und d_t die Ordnung von p_t , so ist $e_t \mid 2/d_t$ und $f_t = 1$. *Taussky* (Wien).

Schröder, J.: Zur Auswertung zur Möbiusschen Funktion gehörenden summatorischen Funktion. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 148–163 (1933).

Schröder, J.: Beiträge zur Darstellung der Möbiusschen Funktion. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 223–237 (1933).

Elementare Untersuchungen über die im Titel genannten Funktionen.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Landau, Edmund: Über den Wienerschen neuen Weg zum Primzahlsatz. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 32/33, 514–521 (1932).

In der Arbeit „Über Dirichletsche Reihen“ (Gött. Nachr. 1932, 525–527; dies. Zbl. 6, 197) führte der Verf., dem Wienerschen Weg folgend, einen erstaunlich kurzen Beweis der folgenden Heilbronn-Landauschen (Math. Z. 37, 10) Verallgemeinerung des Landau-Ikharaschen Satzes aus: „Ist für $y \geq 0$, $H(y) \geq 0$, $e^y H(y)$ nicht ab-

nehmend, $g(s) = \int_0^\infty e^{-ys} H(y) dy$, $\sigma > 0$, $s = \sigma + it$, und für $|t| \leq \lambda > 0$, $g(s) - 1/s \rightarrow h(t)$,

bei $\sigma \rightarrow 0$, gleichmäßig in t , dann existiert eine positive, von $H(y)$ unabhängige Funktion $w(\lambda)$ derart, daß $w(\lambda) = o(1)$, bei $\lambda \rightarrow \infty$, und $\limsup_{y \rightarrow \infty} |H(y) - 1| \leq w(\lambda)$ wird“. — Diesem Wege folgend ist das einzige Ziel dieser

Arbeit, den Primzahlsatz möglichst kurz und anschaulich zu beweisen, ohne zahlen-theoretische Vorkenntnisse zu benützen. Hierbei wird das wenigste über $\zeta(s)$ verlangt, nämlich: daß sie für $\sigma \geq 1$ und, hauptsächlich, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma = 1$ sei. *Karamata*.

Walfisz, Arnold: Teilerprobleme. III. Abh. J. reine angew. Math. 169, 111–130 (1933).

Für $-1 \leq \theta \leq 1$ sei $s_\theta(n)$ die Summe der θ -ten Potenzen aller positiven Teiler der natürlichen Zahl n ; wird $S_\theta(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} s_\theta(n) = R_\theta(x) + T_\theta(x)$ gesetzt, wo

$R_\theta(x) = \zeta(1 - \theta) x + \zeta(1 + \theta) \cdot (1 + \theta)^{-1} x^{1+\theta}$ ist für $-1 < \theta < 1$, $\theta \neq 0$ (für $\theta = 0, 1, -1$ sieht $R_\theta(x)$ etwas anders aus), so ist bekanntlich $S_\theta(x) \sim R_\theta(x)$; für

das Fehlerquadratintegral $U_\theta(x) = \int_1^x T_\theta^2(u) du$ gilt nach Cramér (Verh. d. V. Skan-

din. Mathem.-Kongr. Helsingfors 1922), Walfisz (vgl. Zbl. 3, 103) und Chowla (vgl. dies. Zbl. 4, 102) $U_\theta(x) \sim c(\theta) x^{a(\theta)}$, wo $c(\theta) > 0$, $a(\theta) = 1$ für $-1 \leq \theta < -\frac{1}{2}$, $a(\theta) = \frac{3}{2} + \theta$ für $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$, $a(\theta) = 1 + 2\theta$ für $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$; es fehlten aber bisher analoge Resultate in den beiden (schwierigsten) Fällen $\theta = \pm \frac{1}{2}$. Diese Lücke wird in der vorliegenden Abhandlung ausgefüllt, indem gezeigt wird:

$U_{-\frac{1}{2}}(x) = cx \log x + O(x)$, $U_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{c}{2} x^2 \log x + O(x^2)$ ($c = \zeta^2(\frac{3}{2}) \cdot \zeta^{-1}(3) \cdot 24^{-1}$)

(bisher war durch Chowla nur $U_{-\frac{1}{2}}(x) = O(x \log x)$, $U_{\frac{1}{2}}(x) = O(x^2 \log x)$ bekannt). Die (elementare) Beweismethode ist eine recht tiefgehende Verschärfung der von Walfisz, l. c., und von Chowla, l. c., entwickelten Methode. (II. vgl. dies. Zbl. 3, 103.)

Jarník (Praha).

Mandelbrojt, S.: Sur les séries de Dirichlet dont les exposants possèdent quelques propriétés arithmétiques. Bull. Soc. Math. France 60, 208–220 (1932).

Proof of theorems announced in C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1884–1887 (1932) and already reviewed in this Zbl. 4, 342. The author calls attention to the fact that a theorem on lacunary power series announced by him in C. R. Acad. Sci., Paris 194, 824–827 (1932) (this Zbl. 4, 59) holds also if the assumptions are satisfied merely in the domain $|z - 1| < \delta$, $|z - \gamma| < 1 - \gamma$, $0 < \gamma < 1$, instead of in $|z - 1| < \delta$,

$|z| < 1$. A. Zygmund, this Zbl. **4**, 59, had remarked that one of the author's assumptions was superfluous [for the latter domain]. These results are, however, partly included in a theorem of Hardy and Littlewood, Proc. London Math. Soc. II s., **25**, 230 (1926). *Hille* (Princeton, N. J.).

Bernstein, V.: Sopra una classe di serie di Dirichlet. Rend. Semin. mat. fis. Milano **6**, 53—69 (1932).

L'auteur résume quelques résultats qu'il a obtenus dans ses travaux précédents et concernant les singularités et l'ultraconvergence des séries de Dirichlet [voir Rendiconti. R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. **63**, 26 (1930)]; il en tire quelques résultats concernant la théorie générale des fonctions. Ainsi de son théorème généralisant un théorème bien connu de Carlson, concernant les séries de Taylor (pour les théorèmes analogues concernant les séries de Taylor voir Lindelöf, Calcul des résidus, Paris 1905, p. 109), l'auteur tire le théorème suivant: Si pour (1) $|\arg z| \leq \pi/2$ on a $|\varphi(re^{i\psi})| < e^{\vartheta r}$ et si $\varphi(z)$ étant holomorphe dans (1), s'annule dans une suite mesurable de points de densité $D = \vartheta/\pi$, alors elle est identiquement nulle. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Titchmarsh, E. C.: On the function $1/\zeta(1+it)$. Quart. J. Math., Oxford Ser. **4**, 64—70 (1933).

Verf. beweist: Ist $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion und C die Eulersche Konstante, so ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(1+it) \log \log t \leq \frac{\pi^2}{6} e^{-C}.$$

Bisher war nur bekannt, daß dieser \lim endlich ist (Bohr, Landau). Der Beweis beruht auf der Betrachtung des Integrals

$$\int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^{-2k} dt,$$

wo k und T gegen ∞ , σ gegen $+1$ strebt.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Chowla, S.: A theorem on characters. II. J. Indian Math. Soc. **19**, 279—284 (1932).

It was proved by Paley (see this Zbl. **3**, 341) that, if $\chi(n)$ is a real primitive character mod k ,

$$\sum_{n=1}^t \chi(n) = O(\sqrt{k} \log \log k),$$

i. e. that there is a sequence of values of k , tending to infinity, to every member of which corresponds a χ and a value of n for which

$$\left| \sum_{n=1}^t \chi(n) \right| \geq A \sqrt{k} \log \log k.$$

Later it was proved by Chowla, in a paper to appear in the Math. Z., that

$$\sum_{n=1}^t \chi(n) = O_R(\sqrt{k} \log \log k),$$

i. e. that the one sided inequality

$$\sum_{n=1}^t \chi(n) \geq A \sqrt{k} \log \log k,$$

holds in the same sense.

In this paper the author assumes the extended Riemann hypothesis, that if ρ is a zero of any of Dirichlet's L -functions, $\rho \leq \frac{1}{2}$. With this hypothesis he proves, by Paley's method, that (1) still holds even if the modulus k is restricted to prime numbers; and also that

$$\sum_{n=1}^t \chi(n) = O_L(\sqrt{\log p}),$$

i. e. that

$$\sum_{n=1}^t \chi(n) < -A \sqrt{\log p},$$

for some constant A and characters to some arbitrarily large prime moduli p .

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Landau, Edmund: Der Paleysche Satz über Charaktere. Math. Z. **37**, 28—32 (1933). Dieser Satz besagt, daß für eigentliche Charaktere $\chi \bmod k$

$$\sum_{n=1}^m \chi(n) = O(\sqrt{k} \log \log k);$$

d. h. für unendlich viele k und dazugehörige χ , m gilt mit einem gewissen festen $P > 0$

$$\left| \sum_{n=1}^m \chi(n) \right| > P \sqrt{k} \log \log k.$$

Verf. beweist diesen Satz abweichend von Herrn Paley und kürzer als dieser. Der Beweis, der nach Schurschem Vorbild mit endlichen Summen statt mit Fourierreihen operiert, führt zunächst zu folgender Aussage: Ist χ ein eigentlicher reeller Charakter

$\bmod k$, $\chi(-1) = 1$, $M = \max_{m \geq 1} \left| \sum_{n=1}^m \chi(n) \right|$, N ganz, $1 \leq N \leq \frac{k}{2}$, φ reell, so gilt

$$\sum_{n=1}^N \frac{\chi(n)}{\sin \frac{\pi n}{k}} \sin n\varphi \leq M \sqrt{k} + 2k.$$

Hieraus folgt, wenn überdies $k > 1$ und $\chi(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ für ungerades n mit $1 \leq n \leq \sqrt{\log k}$, daß $M > P \sqrt{k} \log \log k$, ($N = [\sqrt{\log k}]$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Zum Beweise des

Hauptsatzes wird $T = 4 \prod_{2 < p \leq x} p$ gesetzt, wo $x \geq 3$ ganz ist. Es gibt dann ein $K = K(x)$

mit $K \equiv 1(4)$, $K \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ für $2 < p \leq x$, $1 \leq K \leq T$. Man sieht leicht, daß $K = g^2 k$, wo k positive Fundamentaldiskriminante, und daß also $\chi(n) = \left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{K}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ für ungerades n mit $1 \leq n \leq x$. Die einfache Abschätzung

$T < e^{x^2}$ zeigt, daß $\chi(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ für ungerades n mit $1 \leq n \leq \sqrt{\log k}$, daß mithin $M > P \sqrt{k} \log \log k$. H. Petersson (Hamburg).

Estermann, T.: A proof of Kronecker's theorem by induction. J. London Math. Soc. **8**, 18—20 (1933).

Démonstration très simple qui utilise seulement un résultat de Dirichlet relatif à l'approximation simultanée de plusieurs nombres réels par des fractions rationnelles qui ont le même dénominateur. J. Favard (Grenoble).

Reihen:

Analysis.

Bourion, Georges: Sur une classe de séries de Taylor. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 889—891 (1933).

Continuation of the author's work on overconvergence [C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 938—941, 1216—1218 (1932); this Zbl. **5**, 394 and **6**, 63]. The author mentions the possibility of constructing a power series whose radius of convergence may be zero such that suitably chosen sequences of partial sums converge uniformly to preassigned functions in preassigned domains which may be finite or infinite in number. — Suppose that a power series $\sum a_n(z - z_0)^n$ can be written as the sum of two power series $\sum b_n(z - z_0)^n$ and $\sum c_n(z - z_0)^n$, where the first series exhibits lacunæ of the Hadamard type and the radius of convergence R of the second series exceeds that of the original series. If $b_n = 0$ for $m_k < n < m'_k$ ($k = 1, 2, \dots$) and $m'_k/m_k > 1 + \delta$, the author calls the original series of type A . If $m'_k/m_k \rightarrow \infty$, it is of type B , and if, in addition, $R = \infty$, it is of type C . Assuming $f(z)$ to be of type A , B or C at the origin, he finds that it admits of expansions of the same type in a certain neighborhood of the origin, and in case C this holds for the whole domain of existence. Hille (Princeton).

Soula: Sur les primitives successives d'une fonction. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 61—63 (1931).

Sei $F_0(x)$ stetig für $0 \leq x < 1$, $F_{n+1}(x) = \int F_n(x) dx$ eine Folge von Stammfunktionen mit $F_n(0) = a_n = 0$, $F_n(1) = b_n$. Durch Zuordnung von gewissen analytischen Funktionen, wofür die b_n Funktionswerte oder Entwicklungskoeffizienten sind, können Eigenschaften der b_n ermittelt werden. Z. B. folgt aus dem Verschwinden aller b_n , daß $F_0(x) \equiv 0$; dazu reicht aber schon die Divergenz der Reihe $\sum 1/n_v$ aus den Indizes der verschwindenden b_n hin, nach einem Satz von Blaschke. Auch bekannte Sätze der Potenzreihentheorie (Cauchy-Hadamard, Fabry u. a.) führen zu asymptotischen Aussagen über die b_n . Der Fall $a_n \neq 0$ kann auf $a_n = 0$ zurückgeführt werden.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Webber, W. I.: Note on a paper of S. Banach, „Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen“. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 10, 325—326 (1933).

Extending a theorem of Banach [Studia Math. 2, 209 (1930), Theorem b; ibid. p. 251] the author proves that, given any sequence of numbers $\lambda_n = o(\log n)$ ($\lambda_n \geq 0$), there exists a summable function $\chi(t)$ with Fourier coefficients a_n, b_n such that the series $\sum |a_n|^{\lambda_n} + |b_n|^{\lambda_n}$ diverges. If $\lambda_n = O(\log n)$ this is no longer true. Zygmund.

Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series. II. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 457—491 (1932).

Let (*) $\sum_1^\infty A_n(x)$, $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, be a trigonometric series. Let $P(r, x) = \sum_1^\infty A_n(x) r^n$, $0 < r < 1$, and $\bar{P}(x) = \overline{\lim} P(r, x)$, $\underline{P}(x) = \underline{\lim} P(r, x)$ as $r \rightarrow 1$.

The paper in question contains a number of results giving sufficient conditions in order that (*) be a Fourier series. These results go considerably farther than those hitherto known [the most general being due to Zygmund, Math. Z. 25, 274—290 (1926)]. The

following results of the paper should be mentioned separately. (1) Let (**) $-\sum_1^\infty A_n(x) n^{-2}$

be a Fourier series of a continuous function, and let $\underline{P}(x)$ be finite except possibly at a denumerable set E , while $P(x) \geq \psi(x)$ where $\psi(x)$ is Denjoy-Perron integrable over $(0, 2\pi)$. Finally let, at the points of E , $(1-r)P(r, x) \rightarrow 0$ as $r \rightarrow 1$. Then (*) is a Fourier series. This conclusion still holds if the condition that (**) be a Fourier series of a continuous function is replaced by the condition $a_n, b_n = o(n)$. It should be observed that this theorem answers in the affirmative the question raised by Fejér [Math. Ann. 58, 68 (1904)] as to whether a trigonometric series which is (C 1) summable to zero everywhere vanishes identically [cf. also the paper by the author in the J. London Math. Soc. 6, 106—112 (1931), esp. 112, this Zbl. 1, 331]. The author shows how the assumption $a_n, b_n = o(n)$ can be replaced by $a_n, b_n = o(n^2)$ or even by $a_n, b_n = o(n^3)$, provided other suitable restrictions are introduced. Several Tauberian theorems are established, of which we quote only one: Let $a_n = o(n^3)$, $\varphi(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_1^\infty a_n \left(\frac{\sin n\theta}{n\theta} \right)^2 r''$. If $\varphi(\theta) \rightarrow l$ as $\theta \rightarrow 0$, where l is finite, then $\sum_1^\infty a_n r^n \rightarrow l$ as $r \rightarrow 1$. J. D. Tamarkin (Providence).

Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series. III. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 526—560 (1932).

It has been shown by Rajchman [Math. Ann. 101, 686—700 (1929)] that if $f(x)$ is continuous and of bounded variation over $(0, 2\pi)$ and if $\int_0^{2\pi} e^{inx} df(x) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ assuming all integral values, the $\int_0^{2\pi} e^{int} t(x) df(x) \rightarrow 0$, where $t(x)$ is an arbitrary Borel measurable function. Moreover

$$\int_0^{2\pi} g(x) df(x) \rightarrow \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

for an arbitrary bounded periodic function $g(x)$ which has only finite number of discontinuities. In another place [C. R. Acad. Sci., Paris 187, 1026—1028 (1928)] Rajchman showed how results of the above type could be used to infer that the variation of $f(x)$ over sets of a certain type is zero. In the present paper these results of Rajchman are extended in various directions: (I) by allowing $n \rightarrow \infty$ not through all integral values but through various other sets of values; (II) by imposing weaker restrictions upon the function $g(x)$; (III) by introducing other sets over which the variation of $f(x)$ is still zero, or by allowing $f(x)$ to be discontinuous. While Rajchman based his discussion on the theory of the formal multiplication of trigonometric series, introduced by him, the method used by the author is entirely different and more straightforward. It consists in proving the theorems in question first in the case where $t(x)$ is a trigonometric polynomial, and afterwards in proceeding by limiting processes and by the method of transfinite induction.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Fejér, Leopold: Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen. J. London Math. Soc. 8, 53—62 (1933).

Verf. beweist, daß für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\theta$ die Cesàroschen Mittelwerte dritter Ordnung für $0 < \theta < \pi$ positiv sind. Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \sin(2n-1)\theta$ sind schon

die Mittel zweiter Ordnung positiv (für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ nur nicht negativ). Diese Sätze gestatten viele Anwendungen auf die Fouriersche und Laplacesche Reihe, auf die Theorie der schlichten Potenzreihen usw., von denen einige in der Note ohne Beweis angegeben werden. Als Beispiel der Anwendungen möge der folgende Satz dienen: Ist $f(\theta)$ integrierbar in $(0, \pi)$, ≥ 0 aber nicht ~ 0 , dann sind die arithmetischen Mittel dritter Ordnung ihrer Fourierschen Sinusreihe sämtlich positiv, was nicht für die Mittel 0-ter, 1-ter und 2-ter Ordnung wahr zu sein braucht.

Hille (Princeton, N. J.).

Prasad, B. N.: Note on the summability of the conjugate series of a Fourier series. Tôhoku Math. J. 36, 223—224 (1933).

By means of a simple example the author disproves three theorems of S. Izumi [Tôhoku Math. J. 31, 109—113 (1929)] on the Cesàro summability of the conjugate series of a Fourier series. — A simpler and more elementary disproof is the following. Izumi's first theorem asserts that the conjugate series of the Fourier series of $f(x)$ is summable (C, α) , $\alpha > 0$, to the sum S if

$$f(x+t) - f(x-t) - St = o(1).$$

For a continuous function $f(x)$ this condition is unfortunately satisfied by every finite quantity S , independently of x , so that the sum of the conjugate series is completely arbitrary. Similar contradictions arise in the case of the other theorems.

Hille.

Prasad, B. N.: On the summability (c, 1) of the conjugate series of a Fourier series. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 11, 207—214 (1933).

The author shows by means of an example that the existence of

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{t}{2} dt$$

at a point is not sufficient for the $(C, 1)$ summability of the conjugate series of the Fourier series of $f(x)$ at that point. That the existence of $g(x)$ suffices for $(C, 1 + \eta)$ summability, $\eta > 0$, has been shown by R. E. A. C. Paley [Proc. Cambridge Philos. Soc. 26, 173—203 (1930)]. As a preliminary step the author constructs an example of a conjugate series which fails to converge at a point although the conjugate function exists at that point.

Hille (Princeton, N. J.).

Paley, R. E. A. C., and N. Wiener: Notes on the theory and application of Fourier transforms. I—II. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 348—355 (1933).

The authors intend to publish a series of notes on the theory of Fourier transforms, whose results are of a varied nature, but methods are “similar and consist,

roughly speaking, in conformally mapping the unit circle into a half plane, and considering the Fourier transforms of functions defined on the boundary of the half plane." The present paper contains two notes. In note I (On a theorem of Carleman) the authors give an unexpectedly simple proof of a theorem which is a generalization of the fundamental result of Carleman concerning quasi-analytic functions: A necessary and sufficient condition that a class C_A of functions indefinitely differentiable over

$(-\infty, \infty)$ and satisfying the inequalities $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(\nu)}(x)|^2 dx \leq B^\nu A_\nu^2$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$),

where B is a constant depending on $f(x)$, should be quasi-analytic, is that the integral

$\int_0^\infty \log \left[\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2} \right] \frac{dx}{1+x^2}$ should diverge. This theorem appears as a comparatively easy

consequence of another theorem which is interesting in itself: Let $\varphi(x) \geq 0$ and $\subset L_2$ over $(-\infty, \infty)$. A necessary and sufficient condition that there should exist a (real- or complex-valued) function $F(x)$ vanishing for $x \geq x_0$, where x_0 is a fixed number, and such that the Fourier transform $G(x)$ of $F(x)$ should satisfy $|G(x)| = \varphi(x)$, is that $\int_{-\infty}^\infty |\log \varphi(x)| (1+x^2)^{-1} dx < \infty$. This latter result is essentially equivalent to a

statement concerning necessary and sufficient conditions under which a function analytic in a half plane, can be represented by its proper Cauchy, as well as by its Poisson integrals. In note II (On conjugate functions) it is proved that if $f(\theta)$ is odd and increasing on $(-\pi, \pi)$ and such that $f(\theta) \subset L$, then the conjugate function $\tilde{f}(\theta)$ also $\subset L$. The authors point out that the condition of the oddness of $f(\theta)$ is essential for the validity of the theorem.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Variationsrechnung :

Carathéodory, C.: Généralisation d'un théorème d'Euler sur le mouvement brachistochrone. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 10—12 (1933).

Es ist ein Satz von Euler, daß bei der Brachistochrone der Ebene, wenn die eingeprägte Kraft aus einem Potential entspringt, die Reaktion der Bahn gleich der doppelten negativen Normalkomponente der eingepprägten Kraft ist. Verf. verallgemeinert diesen Satz, ausgehend von dem Variationsproblem der Brachistochrone

$$\int \frac{\sqrt{T}}{h-U} dt = \text{Extrem.},$$

auf den allgemeinen Riemannschen Raum. — Das Variationsproblem ordnet sich als Sonderfall dem allgemeinen Variationsproblem $\int (h-U)^\alpha \sqrt{T} dt$ unter, ($\alpha = -\frac{1}{2}$), das für $\alpha = +\frac{1}{2}$ mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Jacobischen Form zusammenfällt und für $\alpha = 0$ das Ergebnis von Galilei über die Reaktion der Bahn bei Bewegung auf der schiefen Ebene verallgemeinert. — Euler selbst hat seinen Satz, der nur gilt, wenn die eingepprägte Kraft aus einem Potential entspringt, zunächst für allgemeingültig gehalten und auf dieser Grundlage eine Darstellung der Brachistochrone im widerstehenden Mittel gegeben, die er später selbst als irrig erkannte. Verf. zeigt die Stelle in Eulers *Mechanica* auf, von der an seine Überlegungen falsch werden.

Georg Prange (Hannover).

Graves, L. M.: On the existence of the absolute minimum in problems of Lagrange. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 101—104 (1933).

In einer früheren Arbeit [On the existence of the absolute minimum in space problems of the calculus of variations, *Ann. of Math.* **28**, 153—170 (1927)] hat sich der Autor mit dem Problem $\int f(x, y_1, \dots, y_k, y'_1, \dots, y'_k) dx = \text{Min.}$, $g_\mu(x, y_1, \dots, y_k) = 0$, $y'_\sigma = h_\sigma(x, y_1, \dots, y_k)$ ($\mu = 1, \dots, m$; $\sigma = 1, \dots, s$) beschäftigt. Hier werden die Voraussetzungen der dortigen Beweise in einer Reihe von Punkten abgeschwächt.

Rellich (Göttingen).

Sakellariou, Nilos: Sur le calcul des variations. Ann. Soc. Polon. math. **10**, 76—93 (1932).

This paper is an amplification of the author's note „Sur le calcul des variations“ [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI s. **15**, 209—214 (1932); see Zbl. **4**, 298]. The author's proof on pp. 77—79 that either $F_x = 0$ or $x' = *x'$ at points of rupture, is erroneous.

Graves (Chicago).

Bliss, G. A., and I. J. Schoenberg: On the derivation of necessary conditions for the problem of Bolza. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 858—864 (1932).

The paper is concerned with the problem of Bolza considered by Bliss in Ann. of Math. II, **33**, 261 (1932) (see Zbl. **4**, 155) and, in a somewhat different form, by Morse and Myers in Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **66**, 235 (1931) (Zbl. **1**, 142). In connection with a remark made in the footnote on page 244 of the latter paper, it is shown how the Euler-Lagrange multiplier rule, as generalized for this problem, can be obtained by slightly modifying the methods introduced by Bliss for his treatment of the problem of Lagrange in Amer. J. Math. **52**, 673 (1930). Moreover the modified form of the problem dealt with by Morse and Myers is proved to be readily reducible to an associated problem of the type used by Bliss.

Arnold Dresden.

Bliss, G. A., and M. R. Hestenes: Sufficient conditions for a problem of Mayer in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 305—326 (1933).

Diese Arbeit behandelt das folgende Mayersche Problem: Unter allen Funktionen $y_i = y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$; $x_1 \leq x \leq x_2$), die den Differentialgleichungen

$$\varphi_\alpha(x, y, y') = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m < n)$$

und den Randbedingungen $\varphi_\mu[x_1, y_i(x_1), x_2, y_i(x_2)] = 0$ ($\mu = 1, \dots, p \leq 2n + 1$)

genügen, ist eine solche zu finden, für die $I = g[x_1, y_i(x_1), x_2, y_i(x_2)]$ ein Minimum wird. Bliss [Trans. Amer. Math. Soc. **19**, 305—314 (1918)] hatte dieses Problem formuliert und dort die aus der ersten Variation entspringenden notwendigen Bedingungen für ein Minimum aufgestellt. Hier werden hinreichende Bedingungen für ein Minimum für den Fall $p = 2n + 1$ aufgestellt. Hinreichende Bedingungen

für das Bolzasche Problem $I = g[x_1, y_i(x_1), x_2, y_i(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ (Nebenbe-

dingungen wie oben) gaben schon Morse und Bliss (vgl. dies. Zbl. **2**, 141 und **4**, 155), doch gestatten dieselben nicht $f \equiv 0$ zu setzen, um das Mayersche Problem zu ergeben. Vielmehr führt gerade das Mayersche Problem auf ein anormales Lagrangesches Problem für die zweite Variation, was beträchtliche Änderungen in den von Bliss für das Lagrangesche Problem geschaffenen Methoden benötigt. Es werden Mayersche Felder definiert und mit deren Hilfe hinreichende Bedingungen durch die sinnvoll übertragenen Bedingungen von Clebsch, Jacobi und Weierstrass ausgedrückt. Im Vergleich zu den früheren Resultaten für das Lagrangesche Problem [Bliss, Amer. J. Math. **52**, 673—743 (1930)] sei auf eine bemerkenswerte Abschwächung der Normalitätsforderungen hingewiesen.

I. J. Schoenberg (Cambridge, Mass.).

Bateman, H., and E. T. Whittaker: Variation problems for a symmetrical region. Nature **1933**, 472.

The note by Bateman points out that the partial differential equation of the conduction of heat, $u_{xx} = u_t$, can be regarded as the Lagrange equation associated with the integral $\iint [u_x(x, t) u_x(x, -t) + u(x, -t) u_t(x, t)] dx dt$, where the region of integration is symmetric with respect to t . The appended remark by Whittaker introduces two new functions Φ and Ψ in terms of which the variation problem yields two partial differential equations. For symmetrical regions these are equivalent to the single equation $u_{xx} = u_t$.

Graves (Chicago).

Bateman, H.: Variational principles in electromagnetism. Physic. Rev., II. s. **43**, 481—484 (1933).

Verf. betrachtet die von Fock und Podolsky benutzte Form der Lagrangeschen

Funktion für das elektromagnetische Feld, nämlich

$$L = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2) - \frac{1}{2} E_t^2; \quad E_t = \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

und zeigt, daß die Bedingung $E_t = 0$ sich dadurch begründen läßt, daß der aus den Größen $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, E_t$ gebildete Impulsenergiesensor nur im Falle $E_t = 0$ symmetrisch wird. Ferner wird in Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. [Physic. Rev. **12**, 459 (1918)] eine allgemeinere Lagrangesche Funktion betrachtet, und die verschiedenen möglichen Formen des zugehörigen Impulsenergiesensors werden diskutiert. *V. Fock.*

Funktionentheorie:

Julia, Gaston: Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes. (Zürich, Sitzg. v. 5.—12. IX. 1932.) Verh. internat. Math.-Kongr. **1**, 102—127 (1932).

● **Julia, Gaston:** Exercices d'analyse. Tome 2. Fonctions analytiques. — Développements en série. — Résidus. — Transformations analytiques. — Représentation conforme. Paris: Gauthier-Villars et Cie. 1933. IV, 344 S. u. 86 Fig. Frs. 70.—

Die meisten mathematischen Aufgabensammlungen haben den Zweck, dem Lernenden die Möglichkeit zu bieten, an Hand von einfachen Übungsaufgaben Fertigkeit in der Anwendung eines als bekannt angesehenen wohlbegrenzten Wissensstoffes zu erlangen. Das vorliegende Werk Julias setzt sich ebenso wie das Aufgabenbuch von Pólya und Szegő ein weiteres Ziel: Es will den Studierenden mit modernen fruchtbaren Forschungsmethoden vertraut machen und ihn so zu eigenem Forschen anregen. Dies sucht es dadurch zu erreichen, daß es nicht, wie üblich, lose voneinander unabhängige Aufgaben aneinanderfügt, sondern diese derart zu Gruppen organisch zusammengehöriger zusammenfaßt, daß durch deren Durcharbeitung der Leser allmählich zur Auffindung einer allgemeinen Lösungsmethode geführt wird. Die Lösung der Aufgaben wird jedesmal angegeben. Vorkenntnisse, die nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, sind den Aufgabengruppen vorausgeschickt. — Der vorliegende 2. Band enthält Aufgaben aus der Theorie der analytischen Funktionen. Neben Kapiteln, die sich im üblichen Rahmen halten, stehen Teile, die aus sonst weniger berücksichtigten Gebieten und aus neuerer und neuester Forschung schöpfen. So bezieht sich eine ganze Reihe von Aufgaben auf die Theorie von Gruppen linear gebrochener Transformationen. Ferner werden das Schwarzsche Lemma und seine verschiedenen Erweiterungen sowie die neuen Ergebnisse auf dem Gebiete der Mittelbildung analytischer Funktionen berücksichtigt. Ein ganzes Kapitel ist dem Riemannschen Fundamentalsatz der konformen Abbildung gewidmet.

Karl Löwner (Prag).

Landau, Edmund: Über einen Satz von Dieudonné. Math. Z. **37**, 22—27 (1933).

Kurzer rein algebraischer Beweis des folgenden Satzes von Dieudonné [C. R. Acad. Sci., Paris **190**, 1109—1111 (1930)]: Für $|x| < 1$ sei $f(x)$ regulär und $|f(x)| \leq M$. Es sei $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Es sei n eine ganze Zahl > 1 . Es sei r die einzige Wurzel von

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} r^{2\nu} = n M r^{n-1}, \quad 0 < r \leq 1.$$

Dann hat für jedes a die Funktion $f(x) - a$ in $|x| < r$ höchstens $n - 1$ Wurzeln.

Hille (Princeton, N. J.).

Heilbronn, Hans: Zu dem Integralsatz von Cauchy. Math. Z. **37**, 37—38 (1933).

Autre démonstration du théorème de Cauchy dans le cas général d'une courbe rectifiable, étudié par Kamke (ce Zbl. **4**, 247) et Denjoy (ce Zbl. **6**, 62). La démonstration donnée ici s'appuie sur les propriétés élémentaires de l'intégrale de Stieltjes et sur un théorème d'approximation par polynômes dérivé d'un théorème de Fejér sur les séries de Fourier. — L'auteur signale en note qu'une démonstration de ce théorème avait déjà été donnée par Pollard [Proc. London Math. Soc. **21**, 456. 482 (1923)].

E. Blanc (Poitiers).

Obrechhoff, Nikola: Sur des fonctions méromorphes qui sont limites des fractions rationnelles. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 746—748 (1933).

Let

$$R_n(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{n\nu}}{z - \alpha_{n\nu}}$$

be a sequence of rational functions which converges uniformly to a meromorphic function $R(z)$. The author determines the form of $R(z)$ under different assumptions on the A 's and the α 's. As a typical case we may take his Theorem II. Here $A_{n\nu} > 0$, $\varphi \leq \arg \alpha_{n\nu} \leq \varphi_1$, $\varphi_1 - \varphi < \pi$ and

$$R(z) = -g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - \alpha_n},$$

where

$$A_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n / |\alpha_n| < \infty, \quad \varphi \leq \arg \alpha_n \leq \varphi_1,$$

$-\varphi_1 \leq \arg g \leq -\varphi$. The theorem can be generalized by assuming $|\arg A_{n\nu}| \leq \theta < \pi/2$.

Hille (Princeton, N. J.).

Valiron, G.: Fonctions convexes et fonctions entières. Bull. Soc. Math. France **60**, 278—287 (1932).

Zunächst erfährt der Begriff konvexe Funktion eine einfache Erweiterung: statt wie gewöhnlich die Geradenschar $a + bx$ werde nun die Kurvenschar $a\varphi(x) + b\psi(x)$ zum Vergleich benutzt, wo φ, ψ gewissen Annahmen über Differenzierbarkeit und Nullstellen genügen. Die bekannten Eigenschaften der konvexen Funktionen lassen sich übertragen. — Es folgt eine Anwendung auf ganze Funktionen endlicher Ordnung ρ , wo der von Phragmén-Lindelöf betrachtete Strahltypus

$$h(\vartheta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\vartheta})|}{r^\rho}$$

ein Beispiel einer in $\varphi(\vartheta) = \cos \rho \vartheta$, $\psi(\vartheta) = \sin \rho \vartheta$ konvexen Funktion gibt. Daneben wird $H(\vartheta)$ betrachtet, wo in obiger Formel \log durch \log^+ ersetzt wird. Auch $H(\vartheta)$ ist in diesem Sinne konvex, periodisch mit 2π und ≥ 0 ; es wird gezeigt, daß $H(\vartheta)$ dadurch charakterisiert ist, d. h. daß man zu jedem gegebenen $H(\vartheta)$ mit diesen Eigenschaften eine ganze Funktion der Ordnung ρ angeben kann, die eben dies $H(\vartheta)$ besitzt; dazu führen unter Benutzung des ersten Teils gewisse unendliche Reihen in den Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\rho(z)$.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Valiron, G.: Généralisations de théorèmes de MM. Lindelöf et Phragmén. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 748—750 (1933).

Es wird eine Integralform des Phragmén-Lindelöfschen Satzes angegeben und zur Untersuchung ganzer Funktionen in schmalen Winkelräumen angewendet: Für die Mittelwerte

$$\mu(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \log |f(re^{i(\vartheta+\tau)})| d\tau, \quad m(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \log^+ |f(re^{i(\vartheta+\tau)})| d\tau,$$

und die oberen Häufungswerte ihrer Quotienten durch $r^{\rho(r)}$ („genaue Wachstumsordnung von $f(z)$ “) werden ähnliche Sätze gewonnen, wie es bei Phragmén-Lindelöf [Acta math. **31** (1908)] in früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **2**, 402) und von Miß Cartwright (dies. Zbl. **4**, 403) für Strahltypen ($\alpha = 0$; vgl. vorstehendes Referat) angebahnt ist.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Geymonat, Ludovico: Ancora sul teorema di Picard per le funzioni analitiche e sue generalizzazioni. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 18—21 (1933).

Einige Sätze, die leicht aus denen von Picard, Landau, Schottky folgen: Anstatt für eine reguläre Funktion zwei endliche Ausnahmewerte vorauszusetzen, wird für zwei reg. Funktionen $f(x)$ und $f(x) + z(x)$ das Vorhandensein eines gemeinsamen Ausnahmewerts k gefordert, wobei $z(x) \neq 0$ sein soll. Dann gibt es z. B. einen Landauschen Radius R , so daß beide Funktionen wohl in $|x| < R$ eindeutig analytisch und von k, ∞ verschieden sein können, aber nicht mehr auf $|x| \leq R$. In der Formulierung ist 1. die Abhängigkeit des R von k vergessen, 2. eine überflüssige Annahme über k aufgenommen. R hängt von k und den beiden ersten, von 0 verschiedenen Entwicklungskoeffizienten beider Funktionen f und z ab; f und z müssen linear unabhängig sein, k ist endlich, aber beliebig.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Calugareano, Georges: Sur une condition nécessaire pour l'uniformité des fonctions analytiques. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **15**, 216—218 (1932).

Takahashi, Shin-ichi: Über die Koeffizientenabschätzungen von ungeraden schlichten Potenzreihen. Proc. Imp. Acad. Jap. **9**, 1—2 (1933).

Für den Fall reeller Koeffizienten gibt der Verf. einen anderen Beweis der Ungleichung von Dieudonné, d. h. $|a_{2n-1}| + |a_{2n+1}| \leq 2$, unter Benutzung der Fourierformeln. Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie der Beweis von O. Szász für die bekannte Abschätzung $|a_n| \leq n$ von Dieudonné-Rogosinski [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **42**, 73—75 (1932); dies. Zbl. **5**, 108]. Hille (Princeton, N. J.).

Grunsky, Helmut: Einige Analoga zum Schwarzsehen Lemma. Math. Ann. **108**, 190—196 (1933).

Ein Bereich der z -Ebene heiße elliptisch schlicht, wenn sein stereographisches Bild von je zwei gegenüberliegenden Punkten höchstens einen enthält. Eine schlichte Funktion heiße elliptisch schlicht, wenn der Bildbereich elliptisch schlicht ist. Der Verf. beweist: Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und elliptisch schlicht und ist außerdem $f(0) = 0$, so ist $\frac{1}{k}f(kz)$ eine ebensolche Funktion, falls k eine Konstante zwischen 0 und 1 darstellt. Die Arbeit enthält ferner eine Reihe weiterer Analoga zum Schwarzschen Lemma, bei deren Beweis sich der Verf. methodisch an seine Dissertation (vgl. dies. Zbl. **5**, 362) anschließt. K. Löwner (Prag).

Ahlfors, L. V.: Quelques propriétés des surfaces de Riemann correspondant aux fonctions méromorphes. Bull. Soc. Math. France **60**, 197—207 (1932).

Verf. gibt zunächst einen Überblick über den Stand des Typenproblems der (einfach zusammenhängenden) schlichtartigen Riemannschen Flächen; nach einer Aufzählung der bekannten Kriterien für das Vorliegen des Grenzpunkt- und Grenzkreisfalls (parabolischer und hyperbolischer Fall) setzt ein Bericht über eine neue Untersuchung des Verf. ein, welche den folgenden Picard-Nevanlinnaschen Satz erheblich verallgemeinert: Eine Riemannsche Fläche habe über q Stellen bzw. nur mindestens m_κ -fache Verzweigungspunkte; dann ist das Bestehen der Ungleichung

$$\sum_1^q \frac{1}{m_\kappa} < q - 2$$

hinreichend für das Vorliegen des Grenzkreisfalls. Nach dem heuristischen Prinzip von Bloch „de continuité topologique“ steht zu erwarten, daß dieser Satz auch bei gewissen stetigen Deformationen der Flächen bestehen bleibt, derart, daß die Verzweigungen nicht notwendig über einzelnen Punkten liegen, sondern beliebig über q fremden Gebieten, so daß diese q Gebiete bzw. nur von mindestens m_κ -blättrigen Flächenstücken überlagert werden. Verf. gibt an, daß er dies allgemein beweisen konnte, wobei 5 Fälle zu unterscheiden waren, die sich aus obiger Ungleichung als Grenzfälle ablesen lassen: nämlich für $q = 5$ $m_\kappa = 2, 2, 2, 2, 2$; für $q = 4$ $m_\kappa = 2, 2, 2, 3$ und für $q = 3$ bzw. $m_\kappa = 2, 3, 7$; $m_\kappa = 2, 4, 6$; $m_\kappa = 3, 3, 4$. In einigen Spezialfällen ist eine Beweisskizze dieses schönen Satzes vom Verf. bereits veröffentlicht worden; so für $q = 3$ $m_\kappa = \infty, \infty, \infty$ und den ersten der obigen Fälle (dies. Zbl. **3**, 407 und **4**, 357); vgl. auch das folgende Referat. Der erste der obigen Fälle ($q = 5$) enthält eine Verallgemeinerung des Valiron-Blochschen Satzes — von der Existenz beliebig großer schlichten Scheiben auf der Riemannschen Fläche einer ganzen Funktion — für die Flächen meromorpher Funktionen: wenigstens einer von 5 gleich großen Kreisen auf der Riemannschen Kugel wird schlicht überdeckt, d. h. wenigstens ein Kreis, dessen Kugelprojektion unter dem Winkel $\frac{\pi}{4} - \varepsilon$ erscheint. Das obige allgemeine Theorem gestattet auch Fassungen, welche dem Landau- und Schottkyschen Satze entsprechen, und liefert überhaupt nach verschiedenen bekannten Richtungen der Wertverteilungstheorie neue Ergebnisse. Ulrich (Marburg, Lahn).

Ahlfors, Lars: Über die Kreise, die von einer Riemannschen Fläche schlicht überdeckt werden. Comment. math. helv. 5, 28—38 (1933).

Die Note enthält einen neuen Beweis des Blochschen Satzes für ganze Funktionen, im Sinne Blochs „finitistisch“ gewendet. Ihre Bedeutung liegt in der Methode, die einen Beweis des allgemeinen Satzes der vorstehend besprochenen Arbeit gestattet; hier ist der Spezialfall $q = 4$, $m_\infty = 2, 2, 2, \infty$ ausgeführt: Aus der Annahme (A), eine im Einheitskreis reguläre Funktion $f(z) = z + \dots$ überdecke 3 endliche Kreisscheiben $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ nur mit mindestens zweiblättrigen Flächenstücken, wird — für passende Scheiben — ein Widerspruch abgeleitet. Die Abschätzung der Blochschen Konstanten fällt dabei schlecht aus. — Über dem Mittelpunkt w_0 des Orthogonalkreises \bar{C} der 3 Scheiben werde die Riemannsche Kugel vom Durchmesser R ($=$ Radius von C) errichtet. d hänge von der Größe der Zentriwinkel der Bögen ab, die die Scheiben von C abschneiden; man füge eine Umgebung des Nordpols vom Zentriwinkel d als 4. Scheibe \mathfrak{R}_∞ hinzu und verbinde die 4 Scheiben durch gewisse Kreisbögen. — Der Beweis gliedert sich dann in folgende Schritte: 1. Unter einer Bedingung für w_0, R, d , d. h. bei passender Wahl der 3 endlichen Scheiben, enthält der Kreisring $r_0 < |z| < 1$ „Urbereiche“ aller 4 Scheiben. 2. Greift man 2 Scheiben und den Verbindungsbogen heraus, so bilden deren „Urbereiche“ und „Urkurven“ in der z -Ebene baumartige Kontinua, die nur Singularitäten von $f(z)$ zu Endpunkten haben können, wenn (A) gilt (sie werden zu Bäumen, wenn man die Urbereiche durch Punkte ersetzt). 3. Von einem Kreisring werde ein Ringstück \mathfrak{R} durch zwei Kurven ausgeschnitten, auf denen $f(z)$ Werte zweier punktfremder Kontinuen annimmt, indes es in \mathfrak{R} Werte eines 3. Kontinuums meidet. $t \theta(t)$ sei die Länge der Bögen, die der Kreis $|z| = t$ mit \mathfrak{R} gemein hat; dann ist das Ahlforssche Verzerrungsintegral beschränkt,

$$(B) \quad \int_{r_0}^r \frac{1}{\theta t} \frac{dt}{t} < K,$$

wo K nur von der Konfiguration der 3 Kontinuen abhängt. 4. Für diese werden nun gewisse Kombinationen der 4 Scheiben und Verbindungsbögen gesetzt; da nur endlich viele vorhanden sind, wird K eine Konstante der Scheibenkonfiguration. Nach einer einfachen Regel werden in $r_0 < |z| < 1$ Ringstücke obiger Art aufgesucht und stets so abgeschnitten, daß sie seitlich von Stücken der Bäume begrenzt sind und die Forderung erfüllt bleibt, daß jeweils Werte einer Scheibe gemieden werden. 5. Aus (A) folgt eine Beziehung zwischen der Anzahl $n(r)$ jener Ringstücke, welche der Kreis $|z| = r$ schneidet, und der Anzahl $N(r)$ jener, welche im Ring $r_0 < |z| < r$ enthalten sind. Sie ist von der Form $N(r) \leq pn(r) - q$ (p, q ganz), während das Zeichen $>$ eintreten kann, wenn auch schlichte Überdeckung der Scheiben möglich ist. 6. Diese Beziehung wird unter Summation der Formeln (B) für alle $N(r)$ Ringstücke in $r_0 < |z| < r$ nach Carlemans Methode der Differentialungleichung ausgenutzt, die ja indes eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Wertverteilungstheorie geworden ist; sie führt auf eine Ungleichung für w_0, R und d , die erkennen läßt, bei welchen Anordnungen der drei endlichen Scheiben $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ wenigstens eine von ihnen schlicht überdeckt werden muß. — Es sind im wesentlichen dieselben Beweisschritte, die auch in den übrigen Fällen des Theorems aus vorstehendem Referat zum Ziele führen (der 6. Schritt liefert dort die Existenz wesentlicher Singularitäten im Endlichen im Widerspruch mit der Ausgangsannahme, es liegt der Grenzpunktfall vor); da aber die Veröffentlichung der Beweise noch zu erwarten ist, mag es erlaubt sein, die Beweisstruktur hier aufzuzeigen.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Possel, René de: Quelques problèmes de représentation conforme. J. École polytechn., II. s. cahier 30, 1—98 (1932).

Der Verf. gibt in der vorliegenden Arbeit eine ausführliche Darstellung von Untersuchungen, die er bereits in mehreren Noten (vgl. dies. Zbl. 3, 313) angekündigt hatte. Sie stehen in engstem Zusammenhange mit der Frage, wann eine Riemannsche Fläche fortsetzbar ist, d. h. als echter Teil einer zweiten Riemannschen Fläche aufgefaßt werden kann. Ferner bestehen Beziehungen zur Theorie der minimalen Schlitzbereiche sowie zu Denjoy'schen Untersuchungen von Singularitäten analytischer Funktionen. Inhaltsübersicht: Zunächst vorbereitende Sätze über das Stieltjessche Integral in derjenigen Allgemeinheit, als es für das Folgende benötigt wird. In Kap. 1 werden die Sternbereiche vom topologischen Standpunkt untersucht. Es wird vor allem gezeigt, daß jedes Primende der Berandung vollständig auf einem vom Zentrum 0 des Bereichs ausgehenden Halbstrahl liegt und einen erreichbaren Punkt enthält. Im Kap. 2 werden die Sternfunktionen $w = f(z)$ [d. h. Abbildungen von $|z| < 1$ auf Sternbereiche mit dem Zentrum $w = 0$, mit der Normierung $f(0) = 0, f'(0) = 1$] betrachtet. Führt man die Funktion $f(e^{it})$ ein, die dem Punkte e^{it} auf $|z| = 1$ den erreichbaren Punkt des e^{it} entsprechenden Primendes zuordnet, so gelten die Sätze:

$$a) \quad f(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}); \quad b) \quad \lambda_r(t) = \arg f(e^{it})$$

ist bei passender Festsetzung des Arcus eine monoton wachsende Funktion von t und

$$\lambda_r(t + 2\pi) - \lambda_r(t) = 2\pi.$$

Unstetigkeitsstellen können allein die t -Werte sein, wo $|f(e^{it})| = \infty$ ist. c) Für

$$\varphi_r(t) = |f(e^{it})| \text{ gilt: } \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t - 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t + 0) = \varphi(t).$$

d) Es ist

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} e^{-\frac{1}{\pi i} \oint \frac{ze^{-it}}{1-ze^{-it}} \lambda_r(t) dt}.$$

$$e) \quad \log \varphi_r(t) = \frac{1}{\pi} \oint \log \frac{1}{r_{t\vartheta}} d\lambda_r(t). \quad (r_{t\vartheta} = |e^{it} - e^{i\vartheta}|)$$

Umgekehrt ordnet d) jeder Funktion $\lambda(t)$, die monoton wächst und für die $\lambda(t + 2\pi) - \lambda(t) = 2\pi$ ist, eine Sternfunktion zu. Zwei solche Funktionen $\lambda(t)$ geben dann und nur dann dieselbe Sternfunktion, wenn sie dieselben Unstetigkeitsstellen aufweisen und in den Stetigkeitsstellen bis auf eine additive Konstante übereinstimmen. Kap. 3: Ist $f(z)$ eine Sternfunktion, so hat (vgl. Satz c des vorigen Kapitels) $|f(e^{it})|$ ein Maximum. Die Menge der Punkte auf $|z| = 1$, wo es erreicht wird, hat die charakteristischen Eigenschaften: α) Sie ist Durchschnitt einer Folge von offenen Punktmenge. β) Gehört ein Intervall $\alpha < t < \beta$ hinzu, so auch α und β selbst. Ist umgekehrt eine Punktmenge Δ auf $|z| = 1$ mit den Eigenschaften: α) β) gegeben, so wird die Menge $-\Phi_\Delta^*$ aller Sternfunktionen betrachtet, die in allen Punkten von Δ den Maximalbetrag annehmen. Wenn Φ_Δ^* allein $f(z) = z$ enthält, so wird Δ vom Maximaltypus genannt. Ferner werde unter F_Δ die Menge derjenigen Sternfunktionen verstanden, deren $\lambda(t)$ bereits auf Δ den Gesamtzuwachs 2π hat. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß Δ vom Maximaltypus ist, besteht nun darin, daß es in F_Δ Funktionen gibt, die auf Δ kleiner als $1 + \varepsilon$ sind, und zwar bei beliebig kleinen positiven ε . Ist Δ eine offene Punktmenge, so ist dies auch notwendig. Hieraus werden rein mengentheoretische Kriterien für Mengen vom Maximaltypus hergeleitet, und es wird eine solche Menge konstruiert, die nicht vom Maße 2π ist. Mit ihrer Hilfe wird im Kap. 5 eine auf Minimalradialschlitzbereiche bezügliche Vermutung von Koebe (vgl. auch dies. Zbl. 3, 14) widerlegt. Das Kapitel enthält ferner einen neuen Beweis der Existenz der Minimalradialschlitzabbildung für beliebig vielfach zusammenhängende Bereiche. Kap. 6: Ist Δ eine offene Punktmenge auf $|z| = 1$, so verstehe man unter Φ_Δ^* die Menge der $|z| < 1$ mit der Normierung $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ schlicht abbildenden Funktionen $f(z)$, die auf Δ konstanten Betrag ϱ haben, während für $|z| < 1$ überall $|f(z)| < \varrho$ ist. Es gelten die Sätze: 1. ϱ erreicht bei einer wohlbestimmten Funktion einen Maximalwert ϱ_Δ . Sie fällt mit der Minimalradialschlitzabbildung des Bereichs Δ zusammen, der aus der Voll-ebene durch Streichung des Komplements von Δ auf $|z| = 1$ entsteht. 2. Δ ist dann und nur dann vom Maximaltypus, wenn $\varrho_\Delta = 1$ ist. Das Kapitel enthält noch eine Reihe weiterer interessanter Extremalbetrachtungen.

K. Löwner (Prag).

Wolff, Julius: Extension d'un théorème de M. Warschawski sur la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 891—893 (1933).

C sei eine geschlossene Jordankurve in der Parameterdarstellung $w(t) = u(t) + iv(t)$ mit $w(0) = 0$, welche die y -Achse in $w = 0$ zur Tangente hat. Es sei $0 < m < \left| \frac{w(t)}{t} \right| \leq M$ und, wenn $\mu(t) = \max_{0 < \tau \leq t} |u(\tau)|$ gesetzt wird, das Integral $\int_{(C)} \frac{\mu(t)}{t^2} dt$ konvergent. $W(z)$

bilde $|z + 1| < 1$ so auf das Innere G von C ab, daß $W(0) = 0$, $W(-1) = w_0$ (w_0 in G) ist. Dann bleibt, wie Ref. (Math. Z. 35, 387—424; dies. Zbl. 4, 404) zeigte $|W(z)/z|$ für $|z + 1| \leq 1$, $z \neq 0$, zwischen 2 positiven Konstanten. Verf. fügt hier hinzu, daß unter diesen Annahmen sogar die „Winkelderivierte“: $\lim_{z \rightarrow 0} W(z)/z$ bei Annäherung im Winkelraum existiert und $\neq 0$, $\neq \infty$ ist. (Ein Teil dieses Resultats, daß nämlich $\lim_{z \rightarrow 0} W(z)/z$ bei radialer Annäherung existiert und $\neq 0$, $\neq \infty$ ist, ist implizite bereits in der oben zitierten Arbeit des Ref. Seite 424 enthalten, was dem Verf. anscheinend entgangen ist.)

S. Warschawski (Göttingen).

Hammerstein, A.: Über die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher durch Polynome. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 5, 259—266 (1933).

Verf. gibt ein hinreichendes Kriterium an für Bereiche, in denen sich jede dort reguläre Funktion $f(w, z)$ in eine gleichmäßig konvergente Polynomreihe entwickeln läßt (im Gegensatz zur Funktionentheorie einer Veränderlichen hat nicht jeder Bereich des w - z -Raumes diese Eigenschaft); er beweist den Satz: \mathfrak{B} sei ein beschränkter

Bereich; $P_\nu(w, z)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) sei das zu \mathfrak{B} gehörige vollständige System von Orthogonalpolynomen. Zu einem geeigneten \mathfrak{B} umfassenden Sternbereich \mathfrak{S} und zu einem Weg \mathfrak{B} der komplexen t -Ebene mit den Endpunkten t_1 und t_2 und einer Umgebung \mathfrak{B}^* dieses Weges mögen zwei in den Veränderlichen w, z, t stetige Funktionen:

$$W = F(w, z; t), \quad Z = G(w, z; t); \quad w \equiv F(w, z; t_1), \quad z \equiv G(w, z; t_1)$$

(w, z aus \mathfrak{S} , t aus \mathfrak{B}^*) mit folgenden Eigenschaften existieren: 1. bei festem t aus \mathfrak{B}^* sind F und G regulär im abgeschlossenen Bereiche \mathfrak{S} und bei festem w, z aus \mathfrak{S} als Funktionen von t regulär in \mathfrak{B}^* ; 2. der Punkt $W = F(w, z; t)$, $Z = G(w, z; t)$ liegt für t auf \mathfrak{B} und w, z aus \mathfrak{B} wieder in \mathfrak{B} ; 3. es gibt ein R , so daß die Hyperkugel $|w|^2 + |z|^2 \leq R^2$ in \mathfrak{B} liegt und dazu ein $t_3 = t_3(R) \neq t_2$ auf \mathfrak{B} , so daß $|F(w, z; t)|^2 + |G(w, z; t)|^2 \leq R^2$ für alle w, z aus \mathfrak{B} und alle t auf \mathfrak{B} zwischen t_2 und t_3 . Dann konvergiert stets, falls $f(w, z)$ eine im abgeschlossenen Bereiche \mathfrak{B} reguläre Funktion darstellt, die Polynomentwicklung $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(w, z)$ mit $a_\nu = \int_{\mathfrak{B}} \overline{f P_\nu} d\omega$ ($d\omega = du dv dx dy$;

$w = u + iv$, $y = x + iy$) im Innern von \mathfrak{B} gleichmäßig gegen $f(w, z)$. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf die Theorie der Orthogonalfunktionen, insbesondere auf einige Resultate von St. Bergmann. Der Satz enthält als Spezialfall ein Ergebnis von B. Almer [vgl. Ark. Math. 17 (1922/1923)], nach welchem sich jede in einem Sternbereich reguläre Funktion $f(w, z)$ dort in eine Polynomreihe entwickeln läßt.

Thullen (Münster i. Westf.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Tornier, Erhard: Bemerkung zu der Arbeit von Herrn Iglisch: Zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. 108, 319—320 (1933).

Verf. gibt ein Beispiel dafür, daß der von Iglisch eingeführte Begriff der regulären Folge nicht widerspruchsfrei ist (vgl. dies. Zbl. 5, 253). Rehbock (Bonn).

Morand, Max: Sur les principes du calcul des probabilités. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 58—60 (1933).

Veen, S. C. van: Wahrscheinlichkeitsprobleme beim Würfeln. Nieuw Arch. Wiskde 17, 120—136 u. 209—239 (1932) [Holländisch].

Man wirft wiederholt mit n Würfeln, bis alle die Zahl 6 zeigen, indem jeder 6 zeigende Würfel weiter liegen bleibt. Verschiedene Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte bei diesem Spiel werden berechnet, dabei auftretende Reihen summiert, und die Resultate numerisch verglichen mit asymptotischen Näherungswerten, welche sich auch für kleine n als sehr genau herausstellen. Auch Würfel mit anderer Flächenzahl als 6 werden betrachtet.

F. Zernike (Groningen).

Montessus de Ballore, R. de: Jeu de la roulette. Étude expérimentale d'écart probables. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 53, 10—15 (1933).

Okaya, Tokiharu: Sur des applications des fonctions caractéristiques de l'intégrale de probabilité. Jap. J. Physics 8, 59—83 (1933).

Es sei:

$$Z(x) = [F(x)]^{-1} \int_x^\infty F(\lambda) d\lambda, \quad H(x) = [U(x)]^{-1} \int_x^\infty U(\lambda) d\lambda,$$

wobei:

$$F(x) = \exp(-\tfrac{1}{2}x^2), \quad U(x) = \int_x^\infty F(\lambda) d\lambda.$$

Ausgehend von den obigen Funktionen, deren Eigenschaften vom Verf. in einer anderen, der Acad. Roy. de Belgique vorgelegten Arbeit eingehend behandelt worden sind, gibt der Verf. die von ihm erzielten Resultate wieder und wendet dieselben auf die Jonenbewegung sowie auf das Liesegangsche Phänomen an. de Finetti (Trieste).

Hostinský, B.: Application du calcul des probabilités à la théorie du mouvement Brownien. Ann. Inst. H. Poincaré 3, 1—74 (1932).

Vorträge über die genauere mathematische Behandlung einer Integralgleichung für die Verteilungsfunktion von Brownschen Teilchen, welche schon von Smoluchowski 1913 aufgestellt wurde. Die Integralgleichung wird nicht wie üblich durch die sog. Fokker-Plancksche partielle Differentialgleichung ersetzt, sondern beide Gleichungen nebeneinander betrachtet. Fußend auf unbekannt gebliebene Arbeiten von Markoff werden die allgemeinen Eigenschaften der Lösung durch ein Iterationsverfahren, dessen Konvergenz in einem wichtigen Falle von F. Perrin (Ann. École norm. sup. 1928) bewiesen wurde, gefunden. Zuletzt wird ein Beweis für viel allgemeinere Probleme angekündigt.

F. Zernike (Groningen).

Leontowitsch, M.: Zur Statistik der kontinuierlichen Systeme und des zeitlichen Verlaufes der physikalischen Vorgänge. Physik. Z. Sowjetunion 3, 35—63 (1933).

In einem mehrdimensionalen Raum sei $\vartheta(\mathcal{X})$ eine Funktion des Gebietes \mathcal{X} ; sie wird als „additive mittlere Funktion“ bezeichnet, falls $\vartheta(\mathcal{X})m(\mathcal{X})$ im gewöhnlichen Sinne additiv ist, wo $m(\mathcal{X})$ das Maß des Gebietes \mathcal{X} bedeutet. Die Werte von $\vartheta(\mathcal{X})$ werden als zufällige Variable aufgefaßt; für beliebige und in beliebiger Anzahl n vorhandene Gebiete $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ bedeute

$$W_n(\mathcal{X}_1, \vartheta_1; \mathcal{X}_2, \vartheta_2; \dots; \mathcal{X}_n, \vartheta_n) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_n$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\vartheta_k < \vartheta(\mathcal{X}_k) < \vartheta_k + d\vartheta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ist. Es werden die notwendigen „Faltungsregeln“ für die Funktionen W_n und ihre Fourierschen Transformaten („charakteristischen Funktionen“) festgestellt. Der Spezialfall der Gaußschen Verteilung $W_n = \sqrt{D/(2\pi)^n} e^{-Q}$, $Q = \frac{1}{2} \sum q_{kl} \vartheta_k \vartheta_l$, $D = \text{Det}(q_{kl})$ wird eingehend untersucht. Die Fouriersche Transformierte hat die Form $V_n = e^{-P}$, $P = \frac{1}{2} \sum p_{kl} u_k u_l$; die Formen P und Q sind reziprok; p_{kl} ist der Erwartungswert von $\vartheta(\mathcal{X}_k) \vartheta(\mathcal{X}_l)$ und somit eine Funktion $p(\mathcal{X}_l, \mathcal{X}_k)$; es wird gezeigt, daß dies eine additive mittlere Funktion in bezug auf beide Argumente ist; umgekehrt definiert eine solche Funktion im beschriebenen Sinn eine gewisse Gaußsche Verteilung. Aus den Eigenschaften von $p(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ läßt sich das wahrscheinlichkeitsmäßige Verhalten von $\vartheta(\mathcal{X})$ in verschiedener Richtung erkennen; es gilt z. B. der Satz: Ist

$$p(\mathcal{X}, \mathcal{X}) + p(\mathcal{X}', \mathcal{X}') - 2p(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \rightarrow 0$$

wenn \mathcal{X} und \mathcal{X}' sich auf einen Punkt x zusammenziehen, so existiert der Limes $\lim \vartheta(\mathcal{X}) = \vartheta(x)$ „mit der Wahrscheinlichkeit Eins“; ähnliche Kennzeichen lassen sich für die Differenzierbarkeit von $\vartheta(x)$ aufstellen. Das Verhalten der Fourierkoeffizienten von $\vartheta(\mathcal{X})$ in bezug auf ein normiertes Orthogonalsystem als zufälliger Variablen wird diskutiert. In einigen für die Anwendungen wichtigen Spezialfällen werden Grenzverhältnisse besprochen, welche eintreten, wenn die Anzahl n der gewählten Gebiete unendlich groß wird und diese Gebiete ohne gegenseitige Überdeckung den ganzen Raum erfüllen. Die Theorie wird auf Schwankungsprobleme der thermodynamischen Statistik und auf die statistische Behandlung des zeitlichen Ablaufs physikalischer Vorgänge angewandt; in letzter Richtung wird eine Begründung des v. Misesschen „Pseudoergodensatzes“ durchgeführt. Verf. betont, daß die Beweise keinen Anspruch auf mathematische Strenge erheben; es ist jedoch zu bemerken, daß die ganze Auffassung trotzdem mathematisch neu und vielversprechend zu sein scheint.

A. Khintchine (Moskau).

Jordan, Charles: Approximation and graduation according to the principle of least squares by orthogonal polynomials. Ann. math. Statist. 3, 257—357 (1932).

Le Mémoire contient un exposé systématique de la méthode des moindres carrés appliquée à la détermination des polynômes représentants approximativement une fonction dont les valeurs sont données en des points équidistants. La théorie des polynômes orthogonaux correspondant aux points considérés qui a été fondée dans ce but par Tchebycheff, a été simplifiée et popularisée par l'auteur dans des travaux an-

térieurs. Le Mémoire actuel résume les principaux résultats théoriques formels, ainsi que les procédés pratiques de calcul avec des exemples, et des tables des coefficients correspondants. L'auteur termine son exposé par des indications bibliographiques et hystoriques concernant les recherches recentes sur les polynomes orthogonaux de la méthode des moindres carrés pour le cas des coordonnées équidistantes.

S. Bernstein (Charkow).

Castellano, Vittorio: *Sulle relazioni tra curve di frequenza e curve di concentrazione e sui rapporti di concentrazione corrispondenti a determinate distribuzioni.* *Metron* 10, 3—60 (1933).

Smoliakow, P. T.: *Die Fechnersche Korrelationsformel.* *Meteorol. Z.* 50, 87—93 (1933).

In der Meteorologie tritt öfters die Aufgabe auf, für einen Ort, von dem nur eine kurze Beobachtungsreihe vorhanden ist, unter Benutzung der langjährigen Beobachtungen eines Nachbarortes den langjährigen Mittelwert irgendeines meteorologischen Elementes zu berechnen. Die Möglichkeit, diesen Wert mit genügender Genauigkeit zu bestimmen, beruht darauf, daß bei den meteorologischen Größen, besonders bei dem vom Verf. behandelten Luftdruck, der wahrscheinliche Fehler der mittleren Differenz gleichzeitiger Beobachtungen eines Elementes an zwei Orten kleiner ist als der wahrscheinliche Fehler des Mittelwertes des betreffenden Elementes für den gleichen Zeitraum an nur einer Station. — Bezeichnet man mit ε die durchschnittliche Abweichung der Beobachtungen eines Elementes vom Mittelwert an einem Ort, mit ε_A die durchschnittliche Abweichung der Differenzen der entsprechenden Beobachtungen an zwei (benachbarten) Orten, mit n und n_A die Zahl der Beobachtungen, die erforderlich ist, um den Mittelwert im einen und im anderen Falle mit dem gleichen wahrscheinlichen Fehler zu erhalten, so gilt nach Fechner die Beziehung (1) $n_A/n = \varepsilon_A^2/\varepsilon^2$. — An ihrer Stelle leitet Verf. eine andere Formel (2) $n_A/n = 2(1 - r)$ ab, die er als Fechnersche Korrelationsformel bezeichnet. Bestimmt man den darin auftretenden Korrelationskoeffizienten r zwischen den gleichzeitigen Beobachtungen des Elementes an den beiden Stationen auf graphischem Wege, so kann die Zahl n_A der zur Erreichung einer genügenden Genauigkeit der Mittelwertberechnung nötigen Beobachtungen mit Hilfe der Formel (2) mit viel geringerem Zeitaufwand bestimmt werden als nach der klassischen Fechnerschen Formel (1).

F. Baur (Frankfurt a. M.).

Craig, A. T.: *Variables correlated in sequence.* *Bull. Amer. Math. Soc.* 39, 129 bis 136 (1933).

Teodorescu, C. C.: *La corrélation statistique.* *Bull. sci. École polytechn. Timișoara* 4, 202—218 (1932).

Nach einer knappen Darstellung der wichtigsten Bezeichnungen und Begriffe der Korrelationstheorie wird das Verteilungsgesetz der statistischen Masse in der Form $f(x, y) = \frac{N}{2\pi} \exp. [-\frac{1}{2}(A x + 2 B x y + C y^2)]$ angenommen und dabei vorausgesetzt, daß der Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfalle. Die Streuungen a_x, a_y werden, wie üblich, definiert, der Korrelationskoeffizient r ist durch $\int \int f(x, y) x y d x d y = r a_x a_y$ erklärt. Mit diesen Größen läßt sich die Verteilungsfunktion in die Form

$$f(x, y) = (2\pi a_x a_y)^{-1} (1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\left(\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - 2r \frac{xy}{a_x a_y} \right) : 2(1 - r^2) \right]$$

bringen. Transformation der Ellipsen $\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2} - 2r \frac{xy}{a_x a_y} = C$ auf die Hauptachsen, geeignete Maßstabsänderung, Polarkoordinaten führen zu der in Anwendungen brauch-

baren Summenfunktion $V_r = 1 - e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$. Einige für graphische Untersuchungen sehr zweckmäßige Bemerkungen beschließen die Arbeit, die, wie die gewählte Verteilungsfunktion zeigt, einem Sonderfall des Korrelationsproblems gewidmet ist. *F. Knoll.*

Messina, I.: Un teorema sulla legge uniforme dei grandi numeri. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, 116—128 (1933).

Es sei $X_{(n)}$ die Frequenz $\frac{m}{n}$ im Bernoullischen Schema mit der Grundwahrscheinlichkeit p . Verf. gibt einige Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit $P_{(n)}$ dafür, daß gleichzeitig $|X_{(k)} - p| \leq \varepsilon_k$ für alle $k \geq n$ gilt, wobei $\varepsilon_k = \varepsilon \left(\frac{n}{k}\right)^\theta$ gesetzt ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

De Finetti, B.: A proposito di un caso limite della legge di Makeham. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, 129—130 (1933).

Beispiele zu einer früheren Abhandlung des Verf. (vgl. dies. Zbl. 2, 278).

A. Kolmogoroff (Moskau).

Chepelevski, A.: Sur la critique des courbes de fréquence de Pearson. *J. Cycle math.* 2, 1—24 (1932) [Ukrainisch].

L'a. démontre l'existence des courbes satisfaisant à l'équation différentielle de Pearson et qui ne correspondent point au schéma d'une urne d'où l'on tire des boules sans remettre la boule sortie.

V. Glivenko (Moscou).

Neyman, J., and E. S. Pearson: On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* 231, 289—337 (1933).

The main purpose of this paper is to widen and to simplify the conception of likelihood previously used by the authors in establishing criteria dealing with chances that a statistical hypothesis is true or false and in linking together a number of tests already in use for this purpose. — To explain briefly the definition of likelihood used in this paper for testing a simple hypothesis, take n statistical items (x_1, x_2, \dots, x_n) as a sample point in space of n dimensions. Consider the set A_Σ of probabilities $p_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ corresponding to this point and determined by different simple hypotheses of a class Ω . Denote by $P_\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ the upper bound of the set A_Σ , then if H_0 is a simple hypothesis which determines the elementary probability $p_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, its likelihood is defined by $\lambda = \frac{p_0(x_1, x_2, \dots, x_n)}{P_\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n)}$. — In testing

hypotheses by various criteria involving geometric interpretations, much is made of the concept of a critical region which may be defined as a region for which the likelihood of a set of items is less than a certain constant taken as a boundary value in accepting or rejecting hypotheses. — The present paper is concerned with the problem of selecting the best critical regions and criteria for the purpose of testing a statistical hypothesis in such a way as to lead to its acceptance when it is true and to its rejection when it is false. — It is found, for simple hypotheses, that the choice of the most efficient criterion, or of the best critical region, is equivalent to the solution of a problem in the calculus of variations. — For composite hypotheses, the problem of the best critical region is solved only under considerably restricted conditions. The method of finding best critical regions for both simple and composite hypotheses is illustrated by appropriate problems.

H. L. Rietz (Iowa).

Baten, William Dowell: Sampling from many parent populations. *Tôhoku Math. J.* 36, 206—222 (1933).

Zwei statistische Aufnahmen, aus r bzw. t Individuen bestehend, werden respektiv zweien Gesamtheiten A und B entnommen, die m bzw. n Individuen enthalten. Es werden die wichtigsten statistischen Maßzahlen der so entstandenen Aufnahme von $r + t$ Individuen berechnet und ihr Verhalten für $m, n, r, t \rightarrow \infty$ untersucht. Zuletzt wird unter demselben Standpunkt auch der Fall einer beliebigen festen Anzahl von Gesamtheiten erläutert.

A. Khintchine (Moskau).

Lorenz, Paul: Über Näherungsparabeln hohen Grades und ihre Aufgabe in der Konjunkturforschung. *Metron* 10, 61—78 (1933).

Der Verf. wiederholt die bereits aus seinen früheren Arbeiten über den gleichen Gegenstand bekannten Gedanken. (Vgl. dies. Zbl. 5, 304.)

Eugen Altschul.

Astronomie und Astrophysik.

Hartmann, J.: Beiträge zur Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen. *Astron. Nachr.* **248**, 277—282 (1933).

Die Formeln für die Bahnbestimmung eines kleinen Planeten aus drei Beobachtungen werden in eine für die Maschinenrechnung bequeme Gestalt gebracht. Kernpunkt der Untersuchung ist die Aufstellung einer einfachen Formel zur Gewinnung eines ersten Näherungswertes der heliozentrischen Distanz. In die Formel gehen ein die tägliche geozentrische Eigenbewegung des Planeten auf dem Parallel und der Rektaszensionsunterschied zwischen Planet und Sonne. J. Hartmann gewinnt diese Formel rein empirisch aus dem statistischen Material. A. Klose (Berlin).

Seonzo Pasquale: Sulla risoluzione dell'equazione di Kepler. *Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei* **86**, 55—58 (1933).

Applicando il procedimento di Goursat sulle funzioni implicite, l'A. ha risolto l'equazione di Kepler $\varepsilon - e \sin \varepsilon = M$ trovando la funzione implicita $\varepsilon(M)$ come somma di una serie di funzioni assolutamente ed uniformemente convergente in un conveniente intorno di M . Autoreferat.

Rossier, Paul: Comparaison de quelques statistiques stellaires. *Arch. Sci. Physiques etc.* **15**, 5—22 (1933).

Burgatti, P.: Sull'azione di un mezzo resistente nelle moderne teorie sulle origini del sistema solare. *Mem. Soc. astron. Ital., N. s.* **6**, 547—552 (1933).

If the origin of the solar system is ascribed to the encounter of the sun with another star then the planetary orbits have initially high eccentricity. It is generally supposed that they attained their present almost circular form through the action of a resisting medium formed of residual matter drawn off from the sun, but not condensed into planets. The author considers that the requisite mass of this residual matter is impossibly large, unless perhaps its action is confined to the perihelion passages of the planets. He shows further that the effect of a resisting medium is not to decrease the eccentricity indefinitely. By considering the motion of a planet in a homogeneous medium with a resistance proportional to the square of the velocity, he shows that the eccentricity will at first decrease, provided the energy of the system is not too small, but this energy will decrease, and when it has fallen below a certain value, the eccentricity will increase. He does not consider that an explanation of the form of the orbits is provided in this way; nor does he consider the effect of the tidal dissipation of energy to be adequate. W. H. McCrea (London).

Nordström, Helge: The galactic rotation effect on the radial velocities of late type stars with a renewed discussion of Redman's observations. *Ark. Mat. Astron. Fys.* **23 A**, Nr 14, 1—33 (1933).

Während ältere Untersuchungen über den Rotationseffekt bei späten Spektraltypen zu große Werte für die Länge des galaktischen Zentrums ergeben hatten und wegen der starken Geschwindigkeitsstreuung mit erheblicher Unsicherheit behaftet waren, gelingt es Nordström, sowohl für die helleren *K*- und *M*-Sterne als auch für die schwächeren *K*-Sterne (Material von Redman) die Rotationskonstanten in Übereinstimmung mit den aus frühen Typen bekannten Werten abzuleiten. Er wendet dabei den Kunstgriff an, nicht die arithmetischen Mittel der Radialgeschwindigkeiten in den einzelnen Gegenden zu benutzen, sondern bestimmt nach einem graphischen Verfahren die am häufigsten vorkommende Geschwindigkeit für jedes Areal und geht damit in die Ausgleichung ein. Auf diese Weise wird der Einfluß extremer Geschwindigkeiten, wie sie etwa durch spezielle Strömungen hervorgerufen werden können, eliminiert. *Siedentopf.*

Zwicky, F.: Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helv. physica Acta* **6**, 110—127 (1933).

Nach einer einleitenden Darstellung der allgemeinen Eigenschaften und der Entfernungsbestimmungen der extragalaktischen Nebel werden die Messungen der Rot-

verschiebung besprochen; die empirischen Ergebnisse werden folgendermaßen zusammenfassend formuliert: Die Rotverschiebung ist einem Dopplereffekt analog ($\Delta\lambda/\lambda = \text{const}$ für jeden Nebel, unabhängig von λ); die scheinbare Radialgeschwindigkeit nimmt mit der Entfernung linear um 558 kmsec^{-1} pro 10^6 parsec zu. Die räumliche Dichte der Nebel ist, abgesehen von lokalen Nebelhaufen, konstant; für die Existenz einer intergalaktischen Absorption oder Streuung des Lichtes besteht kein Anhalt. In dichten Nebelhaufen (insbesondere im Coma-Haufen mit mindestens 100facher Felddichte) streuen die Einzelgeschwindigkeiten stark, im Gegensatz zur geringen Geschwindigkeitsstreuung der Feldnebel. Die Lichtgeschwindigkeit folgt aus Aberrationsmessungen an Nebeln (Strömberg, van Biesbroeck) ebenso groß wie aus terrestrischen Messungen. Für Winkelgeschwindigkeit und Eigenrotation von Spiralnebeln ergeben van Maanens Messungen unverständlich große Beträge. — Der Gesamtheit dieser Beobachtungen wird keiner der bisherigen Deutungsversuche gerecht. Von den auf der Relativitätstheorie aufbauenden kosmologischen Theorien führt Einsteins quasiskalare Welt nicht direkt auf eine Rotverschiebung, während in de Sitters hyperbolischem Raum mit verschwindender Massendichte nach Tolman [Astrophys. J. **69**, 245 (1929)] $\Delta\lambda/\lambda$ nicht nur von der Entfernung, sondern auch von der Eigengeschwindigkeit des Nebels abhängt. In der von verschiedenen Autoren diskutierten Theorie der sich ausdehnenden Welt entspricht nach Einstein und de Sitter (vgl. dies Zbl. **4**, 88) die beobachtete Ausdehnung einer mittleren Dichte von $10^{-28} \text{ gcm}^{-3}$ gegenüber Hubbles Abschätzung von $10^{-31} \text{ gcm}^{-3}$ für die leuchtende Materie; weitere Aussagen der Theorie sind empirisch noch nicht nachgeprüft. — Eine direkte Wechselwirkung von Licht und Materie (Compton-, Ramaneffekt usw.) ist früher vom Verf. [Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **15**, 773 (1929)] diskutiert und für die Rotverschiebung als bedeutungslos erkannt worden. Dagegen führt der vom Verf. als Gravitationsreibung bezeichnete Effekt der Impulsabgabe eines Photons (gemäß seiner schweren und trägen Masse $h\nu/c^2$) an die seinem Wege benachbarte Materie zu einer Rotverschiebung, die außer von der Entfernung auch von der Dichteverteilung abhängt. — Die im Coma-Haufen beobachteten Geschwindigkeitsunterschiede von mehr als 1500 kmsec^{-1} bleiben ein ungeklärtes Problem; rührten sie von reellen Dopplereffekten der inneren Bewegung her, so müßte unter Voraussetzung stationären Zustands die Dichte das 400fache der beobachtbaren leuchtenden Materie sein. Schließlich wird auf einen Zusammenhang der Rotverschiebung mit dem Problem der durchdringenden Strahlung hingewiesen. Aus dem Fehlen einer sternzeitlichen Variation dieser Strahlung wird gefolgert, daß, wenn sie nicht lokalen Charakters sei, höchstens 1% ihrer Gesamtintensität dem Milchstraßensystem entspringe, während das sichtbare Licht überwiegend galaktischen Ursprungs ist. Andererseits müßte kosmische Strahlung aus großer Entfernung infolge der Rotverschiebung mit sehr verminderter Energie eintreffen; ferner müßte auch sie durch die Absorption in der galaktischen Ebene eine sternzeitliche Variation zeigen. Verf. ist daher versucht zu schließen, daß die durchdringende Strahlung nicht extragalaktischen Ursprungs sein kann. *Wempe.*

Cecchini, G.: *Le stelle variabili e la teoria balistica del Prof. La Rosa.* Rend. Semin. mat. fis. Milano **6**, 109—126 (1932).

Dopo un cenno sommario sui fenomeni presentati dalle stelle variabili, l'A. espone il concetto fondamentale della teoria balistica, emessa dal Prof. La Rosa per giustificare la variabilità delle stelle come una pura apparenza, e discute le conseguenze principali della teoria stessa. *Autoreferat.*

Rosseland, Svein: *On the theory of the chromosphere and the corona.* Avh. Norske Vid. Akad. Oslo Nr **1**, 1—37 (1933).

Die Grundlage der Theorie bildet die Annahme, daß von der Sonne ständig Elektronen von nahezu Lichtgeschwindigkeit emittiert werden, welche die große Ausdehnung von Chromosphäre und Korona bewirken. In der Atmosphäre seien neutrale Atome, positive Ionen und freie Elektronen vorhanden; es wird ein stationärer Zustand

angenommen, bei dem neutrale Atome und freie Elektronen im hydrostatischen Gleichgewicht bleiben, während positive Ionen sich ständig nach auswärts bewegen. Diese Auswärtsbewegung wird gehemmt durch Zusammenstöße mit den neutralen Atomen und freien Elektronen. Ausgehend von den allgemeinen Differentialgleichungen des Problems untersucht Verf. einen Spezialfall, der sich durch mathematische Einfachheit auszeichnet und der physikalischen Vorstellung entspricht, daß der primäre Elektronenstrom von einer harten γ -Strahlung ausgelöst wird, die entweder aus dem Inneren der Sonne kommt oder von außen auf die Sonnenatmosphäre trifft. Ferner wird Isothermie vorausgesetzt. Es werden dabei ähnliche Dichtegesetze möglich wie bei der Milneschen Chromosphärentheorie, wo statt des elektrischen Feldes der Strahlungsdruck die Atmosphäre „trägt“, nämlich im allgemeinen exponentieller Abfall, wie ihn auch die Beobachtung zeigt. — Für die Elektronendichte am Boden der Korona ergibt sich unter der Voraussetzung, daß das Leuchten der Korona durch Streuung des Sonnenlichtes an den freien Elektronen bewirkt wird, ein Wert von $2 \cdot 10^8$ Elektronen pro Volumeneinheit. Die Deutung des beobachteten Potenzgesetzes für den Dichteabfall in der Korona bietet keine besonderen Schwierigkeiten für die Theorie, wohl aber die Existenz einer hinreichenden Anzahl von freien Elektronen. Infolge der Temperaturbewegung der Elektronen müßten die Fraunhoferlinien im Koronaspektrum eine Halbwertsbreite von etwa $7-10 \text{ \AA}$ haben. Der Massenverlust, den die Sonne durch das Ausströmen der positiven Ionen erfährt, ist so klein, daß nach 10^9 Jahren die Sonnenmasse noch nicht merklich geändert wird. — Endlich wird noch der Einfluß des Magnetfeldes der Sonne auf das Gleichgewicht der Korona und auf die Form der Koronastrahlen behandelt; bei Berücksichtigung des Magnetfeldes verringern sich die Schwierigkeiten der Theorie hinsichtlich der Anwesenheit der großen Zahl freier Elektronen in der Korona. *Siedentopf.*

Gunn, Ross: On the relations of stellar electricity and magnetism to the phenomena of the sun's atmosphere. Science 1932 II, 577—583.

The existence of a magnetic field at or near the surface of the sun is known from direct observation. The magnitude and existence of an electric field is inferred from theory and analogy with the atmosphere of the earth. If there is an electric field, certain hitherto anomalous observational data can be explained: the rate of rotation of the sun at different atmospheric levels, the strong east wind at high altitudes, the presence of chromospheric lines of He, He^+ , and other atoms requiring high excitation. No attempt is made to present a complete mathematical discussion of the problems of the solar atmosphere. *Menzel (Cambridge).*

Quantentheorie.

● **Néculcéa, Eugène: Sur la théorie du rayonnement. D'après M. C. G. Darwin. (Actualités scient. et industr. Nr. 56. Exposés de physique théorique. Publiés sous la direction de Louis de Broglie. VI.)** Paris: Hermann & Cie. 1933. 24 S. Fres. 7.—.

Erweiterte Wiedergabe in französischer Sprache des Inhalts einer Arbeit von C. G. Darwin [Proc. Roy. Soc. A. 136, 36 (1932); dies. Zbl. 4, 282] in der die Darstellbarkeit der Quantenelektrodynamik mit Hilfe von Wellenfunktionen der einzelnen Photonen und die hierbei einzuführende Wechselwirkungsenergie zwischen Protonen und geladenen Teilchen diskutiert werden. *R. Peierls (Cambridge).*

Fokker, A. D.: Symmetrische Schwingungen. Physica 13, 65—76 (1933).

The different possible types of vibrations are analysed and described for the molecules of carbon dioxide, ammonia and methane, and for the crystals of calcite and quartz. These afford examples and applications of the theory concerning the classes of vibrations in symmetrical arrangements. *Autoreferat.*

Levi-Civita, T.: Diracsche und Schrödingersche Gleichungen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 5, 240—250 (1933).

Verf. versucht, den allgemein-relativistischen Diracschen Gleichungen Tensorform zu erteilen, indem er die 4 Diracschen ψ -Funktionen als Komponenten eines Weltvektors auffaßt. *V. Fock (Leningrad).*

Kuhn, Werner, und Hans Martin: Über die Energiebestimmtheit kurzdauernder atomarer Vorgänge. *Z. Physik* 81, 482—490 (1933).

Es wird auf die bekannte Tatsache hingewiesen, daß, falls man in einem Prädissoziationsgebiet mit einer Lichtfrequenz einstrahlt, deren Energiedefiniertheit größer ist als die der verbreiterten Absorptionslinien, die Energiedefiniertheit der zerfallenden Bruchstücke sich nach der anregenden Lichtfrequenz und nicht nach dem verbreiterten Zwischenzustand richtet. Man darf also aus der Lebensdauer eines Zustandes wohl auf seine Breite schließen, aber nicht auf die Energiedefiniertheit eines Moleküls bei einem Prozeß, in dem dieser Zustand als Zwischenzustand vorkommt. *E. Teller.*

Essin, O.: Zur Theorie der gemeinsamen Entladung verschiedener Ionenarten. *Z. physik. Chem. A* 164, 87—96 (1933).

Aus der bekannten Stromleitungsgleichung für elektrolytische Lösungen folgt, daß sich der Strom zwischen den verschiedenen Ionensorten proportional den relativen „Bewegungsfähigkeiten“ verteilt; d. h. der Stromanteil, den eine beliebige Ionensorte j überträgt, ist:

$$\frac{c_j l_j f_{\lambda j}}{\sum_i c_i l_i f_{\lambda i}} \quad (1)$$

(c_j : Bruttokonzentration der Ionen der Sorte j , l_j : Beweglichkeit des Ions der Sorte j bei unendlicher Verdünnung, $f_{\lambda j}$ Leitfähigkeitskoeffizient). Da l_j die Beweglichkeit im reinen Lösungsmittel bei völliger Abwesenheit von Einflüssen der übrigen Ionenarten und $f_{\lambda j}$ die Einwirkung des Kraftfeldes der anderen Ionensorten charakterisieren, ist $l_j f_{\lambda j}$ ein Maß für die „Bewegungsfähigkeit“ des betreffenden Ions j . Die Beziehung (1) liefert eine Erklärung früher aufgefundener Gesetzmäßigkeiten zwischen Stromausbeute und Ionenkonzentration im Sinne von F. Förster und F. Jorre (z. B. für die elektrolytische Bildung des Ammonium- und Natriumpersulfats). Verf. versucht weiter, die Stromverteilung zwischen verschiedenen gleichzeitig an der Elektrode entladene Ionenarten abzuleiten und somit eine Theorie der gemeinsamen Entladung für nichtumkehrbare bzw. umkehrbare Elektrolyse zu geben. In diesem Falle verteilt sich der Strom zwischen den gemeinsam entladene Ionensorten proportional ihren relativen „Entladungsfähigkeiten“; d. h. die Stromausbeute für eine beliebige Ionensorte ist

$$A_j = \frac{c_j \Psi_j}{\sum_i c_i \Psi_i} \quad (2)$$

Hierin ist Ψ_j der Koeffizient der „Entladungsfähigkeit“ des Ions j . Anknüpfend an bekannte thermodynamische Beziehungen über das Potential an der Elektrode im Zusammenhang mit der Entladung der verschiedenen Ionensorten ergeben sich leicht die Größen Ψ_i . Die erhaltenen allgemeinen Ausdrücke lassen eine Erklärung für einige Ergebnisse von P. Sauerwald für die gemeinsame Entladung der Cu^{++} - und Zn^{++} -Ionen, von W. Creutzfeld für andere Metallpaare und R. Abegg für die gemeinsame Entladung und Auflösung der Hg^{++} - und Hg_2^{++} -Ionen zu. *H. Falkenhagen.*

Jaffé, George: Theorie der Leitfähigkeit polarisierbarer Medien. I. u. II. *Ann. Physik*, V. F. 16, 217—284 (1933).

Über die Struktur des Mediums wird die Annahme gemacht, daß es zweierlei Arten Ionen gibt, die sich bezüglich ihrer Wanderung im Felde, Diffusion, Rekombination den üblichen Gesetzen gehorchen, sich aber durch ihr Verhalten an den Grenzflächen unterscheiden: Die Ionen 1. Art sollen durch die Grenzfläche keine Ladung transportieren können; die Ionen 2. Art genügen der gewöhnlich angenommenen Grenzbedingung, nämlich daß ihre Dichte an den Grenzflächen (Elektroden) verschwindet. Zuerst wird der Fall behandelt, daß nur Ionen 1. Art vorhanden sind. Die Vorgänge in dem Medium genügen dann einem System von 3 Differentialgleichungen der 3 unbekannten Orts- und Zeitfunktionen: Dichte der positiven und der negativen Ionen und Feldstärke. Das stationäre Problem kann (unter einer plausiblen Annahme) exakt behandelt werden; man erhält die stationäre, räumliche Verteilung der Ionendichten und des Feldes. Das nichtstationäre Problem wird durch sukzessive Approximation gelöst; hierbei werden die 3 unbekannten Funktionen nach der Wurzel der pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugten Elektrizitätsmenge entwickelt. Die erste Näherung wird berechnet. Die

Methode zur Berechnung der höheren Näherungen ist grundsätzlich bekannt. Als Ergebnis findet man den zeitlichen Verlauf des Auflade- und Entladestromes. Der Fall, in welchem das Vorhandensein beiderlei Ionen vorausgesetzt wird, wird für den stationären Zustand behandelt. Der Vorgang wird dann durch 5 Variable beschrieben (viererlei Ionendichten und die Feldstärke), die einem System von 5 Differentialgleichungen genügen. Die Annahme, daß die Gleichgewichtskonzentration der Ionen zweiter Art klein gegen die der Ionen erster Art ist, führt auf eine Reihenentwicklung nach dem Verhältnis dieser Gleichgewichtskonzentrationen. Die Behandlung des stationären Zustandes zeigt, daß dann in 1. Näherung das System der Differentialgleichungen zerfällt: Man hat die Verteilung der Ionen 1. Art so zu berechnen, als ob sie allein vorhanden wären; der von den Ionen 2. Art herrührende Leitungsvorgang erfolgt, als ob eine erzwungene Feldverteilung vorhanden wäre, die von den Ionen 1. Art allein herrührt. Die Berechnung des Leitungsvorganges wird einmal unter Voraussetzung sehr schwacher Felder, ein andermal unter Voraussetzung sehr starker Felder durchgeführt. Die Ergebnisse werden am Erfahrungsmaterial geprüft. *Eisenschitz (Berlin).*

Kroll, Wolfgang: Zur Theorie der Wärmeleitung bei tiefen Temperaturen. Z. Physik 81, 425—427 (1933).

Der Wärmewiderstand eines Metalles ist für tiefe Temperaturen und bei Abwesenheit von Verunreinigungen proportional zu T^2 . Verf. berechnet den Koeffizienten des quadratischen Gesetzes nach dem Modell von Bloch, und zeigt, daß sein Verhältnis zu dem Wärmewiderstand bei hohen Temperaturen mit dem experimentellen Wert für Lithium übereinstimmt. *R. Peierls (Cambridge).*

Kramers, H. A.: Propriétés paramagnétiques de cristaux de terres rares. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 36, 17—26 (1933).

Aus der Determinantengleichung für ein Atom im Kristallgitter und im Magnetfeld, die früher diskutiert worden war (vgl. dies. Zbl. 6, 239) wird die freie Energie berechnet, was bei Beschränkung auf die Glieder in H^2 ohne Kenntnis der Wurzeln der Gleichung geschehen kann. Die resultierenden Formeln werden zunächst angewandt, um eine asymptotische Entwicklung für die paramagnetische Suszeptibilität bei hohen Temperaturen zu gewinnen, wobei sich zeigt, daß kein Glied in $1/T^2$ auftritt, was dem experimentellen Befund entspricht. Die Anwendung der Methode auf den Fall von Tysonit bei tiefen Temperaturen führt mit einigen Vereinfachungen auf eine Formel mit drei Parametern. Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Parameter so zu wählen, daß die experimentellen Werte gut wiedergegeben werden. — In gleicher Weise wird die Methode auf die optische Drehung angewandt, hierbei ist jedoch die Übereinstimmung nicht so gut, so daß hierfür die gemachten Annahmen (insbesondere trigonale Symmetrie des Gitters) wohl noch zu grob zu sein scheinen. *R. Peierls (Cambridge).*

Peierls, R.: Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen. II. Starke Magnetfelder. Z. Physik 81, 186—194 (1933).

Im Gegensatz zur Berechnung der magnetischen Suszeptibilität bei schwachen Feldern (dies. Zbl. 6, 192) ist im Falle starker Felder eine Kenntnis der Terme des festen Körpers nötig. Dabei wird als spezieller typischer Fall ein „Metall“ betrachtet, bei dem ein „Termband“ nur von wenig Elektronen besetzt ist. An einer Analogie wird gezeigt, was für Anomalien der Suszeptibilität vorkommen; dann wird für das genannte Modell das magnetische Moment für verschiedene Temperaturen als Funktion des Feldes berechnet. Das empirisch bestimmte diamagnetische Moment von Wismut ergibt einen Verlauf von gleichem allgemeinen Charakter. Einige Gründe für die vorhandenen Abweichungen werden diskutiert. *F. Hund (Leipzig).*

Peierls, R.: Zur Theorie der Metalle. Erwiderung auf eine Arbeit von A. H. Wilson. Z. Physik 81, 697—699 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 6, 43 (Wilson).

Franck, J., und A. Eucken: Umsatz von Translationsenergie in Schwingungsenergie bei molekularen Stoßprozessen. Z. physik. Chem. B 20, 460—466 (1933).

Beim Zusammenstoß von Molekülen mit Korpuskeln irgendwelcher Art kann Translationsenergie in Schwingungsenergie umgewandelt werden. Es hat sich gezeigt, daß die relative Anzahl der wirksamen Zusammenstöße in den einzelnen Fällen sehr weit-

gehend verschieden ist, ohne daß diese Verschiedenheit durch den Stoßmechanismus verständlich wäre. Es wird darauf hingewiesen, daß durch die Annäherung des Korpuskels in vielen Fällen die potentielle Energie der Bestandteile des Moleküls stark geändert wird, wodurch die beim Zusammenstoß stattfindende Reaktion aktiviert werden kann. Die theoretischen Angaben, die man über diesen Effekt machen kann, stimmen qualitativ mit den Erfahrungen über die Stoßausbeuten überein.

Eisenschitz (Berlin).

Bloch, F.: Zur Bremsung rasch bewegter Teilchen beim Durchgang durch Materie. Ann. Physik, V. F. **16**, 285—320 (1933).

Wenn ein rasch bewegtes Teilchen beim Zusammenstoß mit einem Atom nicht stark abgelenkt wird, kann man es einfach als gleichförmig bewegtes Kraftzentrum betrachten; man braucht also nur das Atom, nicht das Teilchen, quantenmechanisch zu behandeln. Nach dieser Methode kann Bloch das Stoßproblem auch noch bei kleineren Geschwindigkeiten behandeln, bei denen die vom Ref. angewandte Bornsche Methode versagt. Die Stöße werden entsprechend der Größe des minimalen Abstands des Teilchens vom Atomkern (Stoßparameter b) in zwei Klassen eingeteilt: Ist b größer als ein gewisser Minimalabstand b_0 , so kann die Wirkung des stoßenden Teilchens auf das Atom als kleine Störung betrachtet und die Übergangswahrscheinlichkeiten in erster Näherung berechnet werden. Für $b < b_0$ dagegen können die Atomelektronen als frei angesehen und das Gordonsche Resultat für den Stoß freier Teilchen benutzt werden. Für den gesamten Energieverlust erhält B. dann eine Formel, die für hohe Geschwindigkeiten ($v \gg \frac{eE}{h}$, E = Ladung des stoßenden Teilchens) in die vom Ref. nach der Bornschen Methode berechnete übergeht, für kleine Teilchengeschwindigkeiten dagegen in die klassische Bohrsche Formel. Ohne Schwierigkeit läßt sich dann auch die relativistische Verallgemeinerung durchführen. Es ist nur bedauerlich, daß auch B. trotz seiner ganz wesentlich verbesserten Methodik die Gültigkeitsgrenze der Bremsformel nicht allzusehr nach kleinen Geschwindigkeiten verschieben konnte: Die Bremsung von Protonen, deren Energie zwischen der Ionisierungsspannung des durchquerten Gases und dem 1800fachen derselben liegt (sowie der entsprechenden α -Teilchen) bleibt noch immer unerledigt.

H. Bethe (München).

Bloch, F.: Bremsvermögen von Atomen mit mehreren Elektronen. Z. Physik **81**, 363—376 (1933).

Bethe [Ann. Physik **5**, 325 (1930)] berechnete das Bremsvermögen von Atomen mit mehreren Elektronen in erster Näherung, indem er die einzelnen Elektronen als voneinander unabhängig in abgeschirmten Coulombfeldern sich bewegend annahm und die Verschiedenheit der Abschirmung für die verschiedenen Anregungszustände des Elektrons vernachlässigte. Verf. setzt das Atom als Thomas-Fermische Gaskugel an und berechnet die Bremsung im Anschluß an eine frühere Arbeit [Ann. Physik. **16**, 285 (1933); vgl. vorst. Referat]. Für den Gang des Bremsvermögens B mit der Ordnungszahl Z erhält er die einfache Formel: $B = Z(2,511 - \ln Z)$, in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung. — Die Arbeit ist auch methodisch von Interesse als erstes Beispiel der Anwendung des Thomas-Fermischen Atommodells bei einem nicht-statischen Problem.

Guth (Wien).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Dawes, Chester L.: Capacitance and potential gradients of eccentric cylindrical condensers. Physics **4**, 81—85 (1933).

Das elektrostatische Feld von zwei exzentrischen unendlich langen Kreiszyllindern ist in der Literatur auf vielfache Weise berechnet worden: durch konforme Abbildung; durch Spiegelung; mittels Integralgleichungen. Verf. stellt die bekannten Formeln, nebst einer Ableitung durch Spiegelung, zusammen, gibt Ausdrücke für den Potentialgradienten an und wertet diese aus.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Wilberforce, L. R.: A common misapprehension of the theory of induced magnetism. *Proc. Phys. Soc., London* **45**, 82—87 (1933).

Es wird ausgeführt, daß bei Eintauchen eines endlich ausgedehnten permanenten Magneten in ein homogenes Medium der Permeabilität μ die magnetische Feldstärke in diesem Medium im allgemeinen nicht einfach um den Faktor $1/\mu$ (gegenüber Vakuum) herabgesetzt, sondern komplizierter beeinflusst wird. *Nordheim* (Göttingen).

Abraham, Henri: Sur la définition du champ magnétique. *C. R. Acad. Sci., Paris* **196**, 908—910 (1933).

L'auteur compare la définition du champ magnétique donnée par Maxwell avec celle proposée en 1898 par J. J. Thomson et trouve que cette dernière doit être préférée. *V. Fock* (Leningrad).

Korn, Arthur: Über ein auf mehrlagige Spulen bezüglich Problem der Elektrotechnik. *Z. angew. Math. Mech.* **13**, 32—35 (1933).

Eine zweilagige Spule, deren beide Lagen in gleicher Richtung von Strom durchflossen werden, wird als ein System von zwei räumlich parallelen geradlinigen Leitern in elektrischer Serienschaltung mit gegenseitiger Induktivität aufgefaßt. Für beide Leiter gelten die Telegraphengleichungen, als zusätzliche Glieder erscheinen die gegenseitigen Induktionsspannungen. Die vereinfachte Lösung der Frequenzdeterminante zeigt, daß 2 Frequenzreihen bestehen, die jede für sich harmonisch nach ungeraden bzw. geraden Vielfachen fortschreiten, während die einzige Frequenzreihe für die einfache Leitung alle ganzen Vielfachen der Grundwelle enthält. Charakteristisch ist der Einfluß der gegenseitigen Induktion, der alle Frequenzen der ungeraden Reihe hinauf-, die der geraden Reihe herabsetzt, so daß je zwei benachbarte Glieder in Schwebung treten und experimentell ein vollkommen verzerrtes Bild liefern, nämlich den Eindruck erwecken, als fehlten die Schwingungen der geraden Frequenzreihe. Durch geeignete Wahl der Wicklungen können die beiden Frequenzreihen anscheinend beliebig verschoben werden, so daß eine Möglichkeit der Verwendung in der drahtlosen Vielfachtelegraphie angedeutet werden kann. *Ernst Weber* (New York).

Strutt, M. J. O.: Skineffekt in einem geschichteten Kreiszyylinder. *Hochfrequenz-techn. u. Elektroakust.* **41**, 62—63 (1933).

Die bekannte Differentialgleichung des Skineffektes wird für den Fall eines runden Leiters aus zwei konzentrischen Schichten gelöst und aus dem Spannungsabfall längs der Leiteroberfläche das Verhältnis von Wechselstrom- zu Gleichstromwiderstand berechnet. Besteht die Außenschicht aus besser leitendem Materiale als die Innenschicht, so ergeben numerische Überlegungen eine Verringerung der Widerstandserhöhung für Wechselstrom gegenüber dem Falle eines soliden Leiters gleichen Durchmessers aus dem Innenmaterial. Im umgekehrten Falle, insbesondere wenn eine Eisenschicht hoher Permeabilität den inneren Kupferleiter überdeckt, ergibt sich ein wesentlich größerer Widerstandsfaktor als für den massiven einheitlichen Leiter. Die auftretenden Besselfunktionen erster und zweiter Art machen allgemeine Rechnungen schwierig. *Ernst Weber* (New York).

Ekelöf, Stig: Über den Wechselstromwiderstand von geraden Drähten mit kreisförmigem Querschnitt, die aus mehreren konzentrischen Schichten bestehen. *Elektr. Nachr.-Techn.* **10**, 115—122 (1933).

In Erweiterung der bekannten Formeln für die Wechselstromimpedanz gerader, aus zwei Schichten aufgebauter Drähte kreisförmigen Querschnitts (z. B. Referent, *Z. Hochf. Elektroak.* **41**, vgl. vorst. Ref.) werden Formeln für n Schichten angegeben, die auf eine kettenbruchähnliche Entwicklung führen. Numerisches zur Auswertung dieser Formeln. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Schumann, W. O.: Strom- und Feldverlauf in Isolierstoffen mit einer beweglichen dünnen Ladungsschicht. *Arch. Elektrotechn.* **27**, 155—168 (1933).

Beschreibung von Vorgängen in einem Dielektrikum, das eine bewegliche dünne Schicht von Ladungsträgern enthält. Die Ströme durch die bewegte Ladung wachsen

im allgemeinen exponentiell mit der Zeit. Bei Kommutierung der Spannung treten Sprünge im Strom auf. Effektive Kapazität und Verlustwinkel sind frequenzabhängig. Je nach Schaltung des Stromkreises können beide auch zeitabhängig sein. *Cauer*.

Beyerle, K.: Ein Beitrag zur Theorie des Telegraphenrelais. Arch. Elektrotechn. **27**, 275—278 (1933).

Die Bewegung eines Relaisankers wird beim Betrieb am Ende eines langen Kabels untersucht. Als neue Vergleichszahlen zur Beurteilung der Sicherheit verschiedener Konstruktionen gegen Prellen werden das elektromechanische Zeitverhältnis und der relative Kontaktwinkel ermittelt. *Cauer* (Göttingen).

King, Louis V.: Electromagnetic shielding at radio frequencies. Philos. Mag., VII. s. **15**, 201—223 (1933).

This paper contains a theoretical estimation of the electromagnetic shielding effect of containers of the shape of a spherical shell and an infinite cylindrical shell; the wavelength of the radiation field is supposed to be large compared with the linear dimensions of the shielding containers. The writer starts from the Maxwell-Faraday laws of electromagnetism and solves the propagation equation for the electrical work function by the usual methods with appropriate combinations of Legendre and Bessel functions, finding approximate and asymptotic formulae in various cases. *Mary Taylor*.

Murray, F. H.: Mutual impedance of two skew antenna wires. Proc. Inst. Radio Engr. **21**, 154—158 (1933).

Double integrals occurring in the calculation of the mutual impedance of two skew wires are transformed and evaluated in terms of Ei , Ci and Si functions.

Mary Taylor (Slough).

Trevor, Bertram, and P. S. Carter: Notes on propagation of waves below ten meters in length. Proc. Inst. Radio Engr. **21**, 387—426 (1933).

Schelleng, J. C., C. R. Burrows and E. B. Ferrell: Ultra-short-wave propagation. Proc. Inst. Radio Engr. **21**, 427—463 (1933).

Englund, Carl R., Arthur B. Crawford and William W. Mumford: Some results of a study of ultra-short-wave transmission phenomena. Proc. Inst. Radio Engr. **21**, 464 bis 492 (1933).

Rukop, H.: Der Stand der Wellenforschung in der oberen Atmosphäre. (*Heinrich Hertz-Ges. u. Dtsch. Ges. f. Techn. Physik, Bad Nauheim, Sitzg. v. 21. IX. 1932.*) Elektr. Nachr.-Techn. **10**, 41—60 (1933).

Taylor, Mary: The Appleton-Hartree formula and dispersion curves for the propagation of electromagnetic waves through an ionized medium in the presence of an external magnetic field. Pt. I: Curves for zero absorption. Proc. Physic. Soc., London **45**, 245 bis 265 (1933).

Numerische Diskussion eines von Appleton und von Hartree abgeleiteten Ausdrucks für die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einem ionisierten Medium bei Anwesenheit eines Magnetfeldes.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Namba, Shogo: General theory on the propagation of radio waves in the ionized layer of the upper atmosphere. Proc. Inst. Radio Engr. **21**, 238—262 (1933).

The writer takes known expressions for indices of refraction and attenuation of an ionised medium in the absence of an external magnetic field and gives an integral expression for the total attenuation along a ray path. This he evaluates for the cases of linear, parabolic and exponential distribution of ionisation with height. He finds that the propagation of "medium-frequency" waves cannot be discussed by the methods of geometrical optics and gives a method of "step reflection", regarding the ionised layer as built up of thin layers of different but constant ionisation densities, to which known expressions for the reflection of electromagnetic waves at a sharp boundary are applied. The method of application of the process is not given in detail; it has apparently been worked out, since a diagram of daylight reflection characteristics of

high and medium frequency waves is given. The rest of the paper consists of a discussion of the physical characteristics of propagation of wireless waves, most of which was already known.

M. Taylor (Slough).

Kaiser, Heinrich: Beitrag zur Theorie der Eigenfrequenzen und der Selbsterregung in elektrischen Schwingungskreisen. Elektr. Nachr.-Techn. 10, 123—143 (1933).

Theorie der gekoppelten Systeme, die einen negativen Widerstand enthalten. Untersuchung der Frequenz in Abhängigkeit von der Kopplung und der Amplituden. Experimentelle Bestätigung der Rechnung.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Ollendorff, Franz: Versuch einer Theorie der Blitzsäule. Arch. Elektrotechn. 27, 169—184 (1933).

Verf. versucht eine quantitative Theorie der fast stationären Blitzsäule zu entwickeln. Die Säule wird als aus einatomigen Stickstoffmolekeln bestehend betrachtet, deren Ionisierungsgrad durch den Druck und die Temperatur nach einer Formel von Saha bestimmt wird. Die Betrachtung der Materiebilanz und der Energiebilanz gestattet es, alle in Betracht kommenden Größen (Gradient, Säulenhalmmesser, Elektronentemperatur, Stromdichte, Säulenstrom) zu berechnen. Die theoretischen Werte stimmen größenordnungsmäßig mit den (recht schlecht bekannten) beobachteten Werten überein. Zum Schluß wird der zeitliche Verlauf des Blitzes diskutiert.

V. Fock.

Ku, Y. H.: Extension of Maxwell's rule for analyzing electrical networks. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 1, 215—221 (1932).

Modifikation einer von Kirchhoff (und Maxwell) angegebenen kombinatorischen Regel zur Berechnung gegebener elektrischer Netzwerke.

Cauer (Göttingen).

Gewertz, Charles M. son: Synthesis of a finite, four-terminal network from its prescribed driving-point functions and transfer function. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 12, 1—257 (1933).

Die Aufgabe, die sich der Verf. stellt, ist eine Weiterführung der Untersuchungen von O. Brune (dies. Zbl. 3, 85) und vom Ref. (dies. Zbl. 3, 377 u. 4, 50). Es handelt sich darum, die schon früher [Bull. Amer. Math. Soc. 37, 164 (1931)] vom Ref. als notwendig erkannt und als hinreichend vermuteten Bedingungen für die Realisierbarkeit einer zweireihigen Matrix durch ein elektrisches vierpoliges Schaltungsnetz zu beweisen.

In Teil XI, 166—194, gibt Verf. einen Beweis dafür, daß diese Bedingungen hinreichend sind. Es wird eine neue Idee verwandt: zunächst Reduzierung der gegebenen zweireihigen Matrix auf eine solche, für welche die Determinante der Realteile für alle Kreisfrequenzen verschwindet. Der Beweis enthält mehrere Fehler. So nimmt bei den „removals of poles at the origin and at ∞ “ (S. 168) der Grad der Determinante der Matrix nicht notwendigerweise ab. Ferner ist der auf S. 185 gemachte vollständige Induktionsschluß („Here we have completed one cycle“) falsch, da die Anzahl der Pole der Matricelemente sich von n auf $2n - 4$ erhöht hat (in dem numerischen Beispiel 26, S. 244, ist $n = 2$). In den Teilen I—X werden bekannte Dinge dargestellt.

Cauer (Göttingen).

Klassische Optik.

● **Born, Max:** Optik. Ein Lehrbuch der elektromagnetischen Lichttheorie. Berlin: Julius Springer 1933. VII, 591 S. u. 252 Fig. RM. 36.—.

Das vorliegende Buch gibt eine neuartige und wirklich moderne Darstellung des Gesamtgebietes der Optik. Die ersten Formeln des ersten Paragraphen des ersten Kapitels sind die Maxwellschen Gleichungen. Die in diesen Gleichungen zusammengefaßte elektromagnetische Lichttheorie bildet in der Tat die alleinige Grundlage der ersten sechs Kapitel, welche die eine Hälfte des Buches einnehmen. In den restlichen zwei Kapiteln werden die Folgerungen aus der atomistischen Struktur der Materie mehr in den Vordergrund gerückt. Die Abgrenzung des zur Optik gehörenden Gebietes wurde folgendermaßen geführt. Die Hertz'schen Wellen sind schon jenseits der langwelligen, die Röntgenstrahlen jenseits der kurzwelligen Grenze der Optik. Andererseits ist die Lichtausbreitung in bewegten Körpern als zur Relativitätstheorie gehörend nicht einbegriffen, ebensowenig wie die Gesetzmäßigkeiten der Spektrallinien, die zur Quantentheorie gehören. Kurze Inhaltsübersicht: Kap. I. Grundtatsachen der elektromagnetischen Lichttheorie, die man im wesentlichen aus der Betrachtung ebener Wellen ableiten kann. Kap. II. Geometrische Optik als Grenzfall der Wellentheorie. Hervorzuheben ist die sorgfältige Behandlung der geometrischen Abbildungsfehler mit Hilfe

der Theorie des Eikonals. Kap. III. Interferenzerscheinungen. Kap. IV. befaßt sich mit Beugungserscheinungen, wobei auch die Beugung an Raumgittern (Röntgenspektren) besprochen wird. Obwohl das Hauptgewicht auf die Darstellung der elementaren (Kirchhoffschen) Beugungstheorie gelegt wird, findet auch die strenge Sommerfeldsche Theorie Berücksichtigung. Im Kap. V. wird der reelle dielektrische Tensor eingeführt und die Kristalloptik behandelt. Kap. VI. Metalloptik der isotropen und anisotropen Substanzen und Problem der Beugung an leitenden Kugeln. (Es sei hier das folgende kleine Versehen berichtigt: In der Tab. 8, S. 261, ist die Eindringungstiefe der Welle in das Metall um einen Faktor 9300 zu groß angegeben.) In Kap. VII (molekulare Optik) und Kap. VIII (Emission, Absorption und Dispersion) werden große Ansprüche an die Darstellungskunst des Verf. gestellt: man soll über ein Gebiet berichten, wo die Quantenprozesse eine entscheidende Rolle spielen, und dabei ohne Heranziehung der Quantentheorie auskommen. Diesen Ansprüchen wird Verf. vollkommen gerecht. Seine Kenntnis der Quantentheorie erlaubt es ihm, mit den einfachsten Mitteln der klassischen Theorie (Resonatormodell) auszukommen und Beziehungen zu gewinnen, welche — bis auf die modellmäßige Deutung — auch in der Quantentheorie gültig bleiben. In Fällen, wo das unmöglich ist (z. B. anomaler Zeemaneffekt) wird das explizite betont. Zur besseren Übersicht der Grenzen der klassischen Theorie wird im § 90, Kap. VIII, der Begriff des Licht- und des Wirkungsquantums eingeführt. — Zusammenfassend kann man sagen, daß Verf. das von ihm gestellte Ziel — eine zeitgemäße Darstellung des Gesamtgebietes der Optik zu geben — in seinem schönen Buch völlig erreicht hat. *V. Fock (Leningrad).*

Sinjagin, A.: Die Lage der Polarisationssebene am Himmelsgewölbe. Gerlands Beitr. Geophys. 38, 66—96 (1933).

Einige allgemeine Eigenschaften der Isoklinen werden festgestellt. Die Betrachtung der Neutrallinien gibt eine Antwort auf die Frage, wie sich am Himmelsgewölbe je nach der Sonnenhöhe das Verhältnis der negativen p_- und positiven p_+ Polarisation ändert. Die Fläche des Himmelsgewölbes mit positiv polarisierten Strahlen wird der Fläche negativ polarisierter Strahlen bei einer Sonnenhöhe von etwa 40° gleich ($p_- = p_+$). Der Prozentgehalt p_- verringert sich gleichmäßig mit zunehmender Sonnenhöhe von 80% bis 0. Diese theoretischen Ergebnisse werden mit den Beobachtungen von Dorno verglichen. Die Übereinstimmung der theoretischen und empirischen Kurven ist befriedigend für alle Sonnenstände. *L. Tuwim (Paris).*

Croze, F.: Sur les aberrations de coma des faisceaux de grande inclinaison. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 913—916 (1933).

Der Verf. betrachtet ein astigmatisches Strahlenbündel, dessen Hauptstrahl unter dem Winkel i gegen die Normale auf eine gekrümmte Fläche fällt, die die Trennungsfläche zweier verschiedener Medien darstellt. Die Krümmungsradien der betreffenden Fläche im Einfallspunkt des Hauptstrahls seien R_1 und R_2 . Ferner wird vorausgesetzt, daß der Hauptstrahl des einfallenden Bündels in einer der Hauptebenen der brechenden Fläche verläuft. Betrachtet man einen Nachbarstrahl des Strahlenbündels, der die tangentielle Brennlinie schneidet, so geht er bildseitig gleichfalls durch die tangentielle Brennlinie. Der Verf. berechnet nun den optischen Wegunterschied des Hauptstrahles und des Nachbarstrahles zwischen der objektseitigen und bildseitigen tangentialen Brennlinie und entwickelt den mathematischen Ausdruck für den Wegunterschied nach Potenzen der Koordinaten des Abstandes JI , wenn J den Schnittpunkt des Nachbarstrahls und I den Schnittpunkt des Hauptstrahls mit der brechenden Fläche bezeichnet. Bei dieser Entwicklung verschwinden die Glieder bis zur 2. Ordnung. Die Glieder 3. Ordnung ergeben die Koeffizienten der Koma des astigmatischen Strahlenbündels. Der Verf. gibt außerdem die Winklaberrationen, die durch die Koma bedingt sind. (Die Arbeit enthält eine große Anzahl von Druckfehlern.) *Picht.*

Strachan, C.: The reflexion of light at a surface covered by a monomolecular film. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 116—130 (1933).

Verf. betrachtet eine monomolekulare Schicht als zweidimensionale kontinuierliche Verteilung Hertzscher Oszillatoren, welche durch die einfallende Lichtwelle erregt werden. Die Erregungsstärke wird als lineare Funktion des resultierenden elektrischen Lichtvektors angesetzt. Die Anwesenheit der Schicht (Erregungszentren) gibt Anlaß zu Diskontinuitäten in den tangentiellen Komponenten der Feldstärken. Diese Diskontinuitäten (Sprungwerte) werden mit Hilfe einer Integraldarstellung des

Feldes berechnet und durch die Werte des Feldes an der Oberfläche ausgedrückt. Die gewonnenen Gleichungen werden als Grenzbedingungen für das Feld aufgefaßt; mit deren Hilfe wird die Amplitude der reflektierten Welle durch diejenige der einfallenden Welle ausgedrückt. Die Resultate werden mit denen von Drude und Darwin verglichen; sie stimmen mit den letzteren nicht überein. *V. Fock (Leningrad).*

Dupouy, G., et M. Schérer: Théorie moléculaire des effets optiques simultanés de la polarisation rotatoire magnétique et de la biréfringence magnétique. Ann. Physique, X. s. 19, 5—46 (1933).

Verff. betrachten die Ausbreitung einer linear polarisierten ebenen Welle in einer Flüssigkeit unter der Einwirkung eines konstanten Magnetfeldes für den allgemeinen Fall einer schiefen Inzidenz (beliebiger Winkel zwischen dem Magnetfeld und der Einfallrichtung der Welle). Die dabei auftretenden magneto-optischen Erscheinungen wurden in einer früheren Arbeit der Verff. experimentell untersucht. Der Theorie wird ein klassisches Modell des Moleküls (axialsymmetrischer Oszillator) zugrunde gelegt. *V. Fock (Leningrad).*

Posener, Lotte: Zur Theorie des Elektronenmikroskops. Z. Physik 80, 813—818 (1933).

Die Verf. behandelt im Anschluß an H. Busch [Ann. Phys. 81, 974 (1926)] den Einfluß eines axialsymmetrischen magnetischen Feldes, einer magnetischen „Linse“ auf den Verlauf von Elektronenstrahlen, wobei sie sich auf das erste Glied der Entwicklung des Vektorpotentials nach Potenzen des Achsenabstandes beschränkt. Sie zeigt, daß nicht nur Achsenpunkte sondern auch achsennahe Punkte stigmatisch abgebildet werden und daß die Vergrößerung, mit der ein kleines achsensenkrechtcs Objekt abgebildet wird, gleich ist dem Quotienten φ_1/φ_2 , wo φ_1 der objektseitige und φ_2 der bildseitige Achsenwinkel eines vom Achsenpunkt des Objektes ausgehenden achsennahen Strahles ist. Für den Brechungsindex, den man den einzelnen Punkten der magnetischen Linse zuzuordnen hat, leitet sie einen von den Koordinaten der Raumpunkte abhängigen Ausdruck ab.

In diesem Ausdruck [Gleichung (13) der Arbeit] und ebenso in den vorhergehenden und den folgenden Gleichungen fehlt ein Faktor $1/\sqrt{2}$. [Weitere Druckfehler: In Gleichung (6) muß im Nenner nicht b sondern b^2 stehen; in den beiden der Gleichung (7) vorausgehenden Gleichungen fehlt der Faktor $1/b^2$; in Gleichung (11₂) muß es heißen

$$H(p, q) = \frac{\eta^2}{4} \left(\frac{p_r^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} \right) + \frac{q_r^2}{2} f^2(q_z).$$

S. 817 Mitte muß es heißen

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2 \left(\frac{\eta^2}{4} H - \frac{\eta^2}{4} \frac{r^2}{2} f^2(z) \right) + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad \text{Picht (Berlin).}$$

Glaser, Walter: Über geometrisch-optische Abbildung durch Elektronenstrahlen. (Inst. f. Theoret. Physik, Dtsch. Univ. Prag.) Z. Physik 80, 451—464 (1933).

Nachdem von verschiedenen Autoren die Möglichkeit, optische Abbildungen mittels Kathodenstrahlen zu erhalten, experimentell mit gutem Erfolg untersucht worden ist, hat der Verf. ganz allgemein das „elektronenoptische“ Verhalten eines elektromagnetischen Feldes theoretisch behandelt. Zu dem Zweck wird die Elektronenbewegung im elektromagnetischen Feld als optischer Strahlengang in einem inhomogenen anisotropen Medium aufgefaßt, und es werden die Methoden der geometrischen Optik anisotroper Körper, wie sie vor allem von Ph. Frank entwickelt worden sind, auf das Problem angewendet. Auf diese Weise erhält man einen Ausdruck für einen Brechungsindex des elektromagnetischen Feldes. Ebenso wird ein Brechungsgesetz für Elektronenstrahlen an der Grenzfläche zweier elektromagnetischer Felder abgeleitet, die man durch 2 parallele Metallnetze mit einer bestimmten Potentialdifferenz herstellen kann, und es wird eine Abbildungsgleichung im zentralsymmetrischen magnetischen Feld hergeleitet. Schließlich läßt sich auch der Abbesche Sinussatz für den vorliegenden Fall verallgemeinern. *Rump (Erlangen).*

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Churchill, R. V.: General properties of steady temperatures in solids partially exposed to gas. *Physics* **4**, 50—55 (1933).

Es wird die Temperaturverteilung betrachtet in einem festen, homogenen und isotropen Körper von konstanter Wärmeleitfähigkeit, von dessen beliebig gestalteter Oberfläche ein Teil im Wärmeaustausch mit einem Gas steht, während die Temperaturverteilung der übrigen Oberfläche festgelegt ist. Es wird nur vorausgesetzt, daß der Temperaturgradient normal zu der dem Gas ausgesetzten Oberfläche eine Funktion der räumlichen Koordinaten und der Temperatur ist, und zwar in dem Sinne, daß sein Absolutwert kleiner wird, wenn die Temperatur der Oberfläche sich der des Gases annähert. Diese Funktion wird als „emissivity“ bezeichnet. Auf Grund dieser allgemeinen Voraussetzungen werden nun 4 Eigenschaften der stationären Temperaturverteilung abgeleitet, die im Falle einer Änderung der Oberflächengröße oder der „emissivity“ Geltung haben. Endlich wird noch das spezielle Gesetz der Temperaturverteilung abgeleitet, das im Falle der Gültigkeit der Newtonschen Formel für den Wärmefluß besteht.

H. Ulich (Rostock).

Sugita, Motoyosi: Über die Thermodynamik der nicht reversiblen Erscheinungen. III. **Teil:** Über die Boltzmannsche Relation in der Thermoelektrizität. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. **s. 15**, 12—29 (1933).

Die im 1. und 2. Teil der Arbeit mitgeteilte thermodynamische Theorie der nicht reversiblen Erscheinungen wird im vorliegenden Teil durch Einführung einer neuen Entropiedefinition vervollständigt. Einige Anwendungsbeispiele aus dem Gebiet der nicht reversiblen und reversiblen Prozesse werden besprochen. (I. u. II. vgl. dies. *Zbl.* **6**, 143).

H. Ulich (Rostock).

Ehrenfest, P.: Phasenumwandlungen im üblichen und erweiterten Sinn, klassifiziert nach den entsprechenden Singularitäten des thermodynamischen Potentials. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **36**, 153—157 (1933).

Erfährt ein Einstoffsystem eine Phasenumwandlung im üblichen Sinne, so ändert sich das thermodynamische Potential Z kontinuierlich, dagegen erleiden $\partial Z/\partial T = -S$ (Entropie) und $\partial Z/\partial p = v$ (Volum) Sprünge. Als eine „Phasenumwandlung zweiter Ordnung“ wird nun der Fall bezeichnet, daß auch $\partial Z/\partial T$ und $\partial Z/\partial p$ kontinuierlich verlaufen, dagegen die zweiten Differentialquotienten $\partial^2 Z/\partial T^2 = -C/T$ (C = spezifische Wärme bei konstantem Druck), $\partial^2 Z/\partial p^2 = \partial v/\partial p$ und $\partial^2 Z/\partial T \partial p = \partial v/\partial T = -\partial S/\partial p$ Sprünge besitzen. Für die Änderung des Umwandlungsdruckes mit der Umwandlungstemperatur ergibt sich bei gewöhnlichen Phasenumwandlungen (bzw. „Phasenumwandlungen erster Ordnung“) die bekannte Clausius-Clapeyronsche Gleichung. Für den entsprechenden Differentialquotienten bei Phasenumwandlungen zweiter Ordnung folgt eine entsprechende Gleichung sowie eine Beziehung, die den Sprung in C mit den Sprüngen von $\partial v/\partial T$ und $\partial v/\partial p$ verknüpft. — Eine Umwandlung dieser Art ist beim flüssigen Helium bekannt. Es wird ferner diskutiert, ob analoge Verhältnisse für das Verhalten der Supraleiter bei der Sprungtemperatur und der Ferromagnetika bei der Curietemperatur vorliegen.

H. Ulich (Rostock).

Fischer, V.: Thermodynamik der Gemische mit einer Anwendung auf Äthylalkohol-Wasser. *Helv. physica Acta* **6**, 42—67 (1933).

Die Arbeit bringt zunächst die Ableitung einer allgemeinen Gleichung, der die Zustandsgrößen eines aus beliebig vielen Bestandteilen bestehenden Gemischs genügen müssen. Diese wird an Messungen der Verdünnungswärmen, spezifischen Wärmen, Dampfdrucke und Siedetemperaturen von Äthylalkohol-Wasser-Gemischen geprüft.

H. Ulich (Rostock).

Krutkow, G.: Beweis für die kanonische Verteilung eines Teilsystems. *Z. Physik* **81**, 377—382 (1933).

Es wird ein einfacher und sehr allgemeiner Beweis dafür gegeben, daß ein kleiner

Teil eines Systems, das sich statistisch mikrokanonisch verhält, selbst kanonisch in der Phase verteilt ist. Zum Beweis wird eine Integraldarstellung der Phasenverteilung des Teilsystems hergeleitet, die nach der Sattelpunktmethode asymptotisch ausgewertet werden kann. Die Voraussetzungen sind z. B. immer dann erfüllt, wenn das System aus einer großen Zahl gleicher, lose gekoppelter Teilsysteme beliebiger Struktur besteht.

Nordheim (Göttingen).

Métadier, Jacques: Sur l'étude du mouvement brownien dans un champ de forces. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 649—651 (1932).

Fortsetzung einer früheren Notiz [C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 1173 (1931); dies. Zbl. **3**, 284]. Die allgemeine Differentialgleichung der Brownschen Bewegung unter Einfluß äußerer Kräfte $\partial p / \partial t = a \Delta p - \text{div } pu$, wo a die Diffusionskonstante, u die mittlere Strömungsgeschwindigkeit durch das Kräftefeld verursacht, kann in besonderen Fällen, wie näher untersucht wird, durch einen Operationskalkül einfach gelöst werden, und zwar, wenn die Kraft die Form $F_1(x, y, z) + F_2(t)$ hat. *F. Zernike.*

Satô, Mizuho: Über den Einfluß der Wärmeströmung auf die Brownsche Bewegung. I. Z. Physik **80**, 822—826 (1933).

In Übertragung eines Gedankenganges von Zeilinger wird versucht, das mittlere Verschiebungsquadrat der Brownschen Bewegung eines kugelförmigen Teilchens in einem Gase zu berechnen, wenn als Mechanismus der Wechselwirkung zwischen Teilchen und Gasmolekülen elastische Reflexion der letzteren an der Oberfläche des Teilchens angenommen wird und wenn in dem Gase ein Temperaturgefälle existiert, also gleichzeitig eine Wärmeströmung darin vorhanden ist. Als Resultat der Berechnung erscheinen zwei Formeln für die hydrodynamische Beweglichkeit und das mittlere Verschiebungsquadrat des Teilchens, die sich von den Zeilingerschen Formeln (ohne Wärmeströmung) durch gewisse Zusatzglieder unterscheiden, die das Temperaturgefälle enthalten. Eine numerische Berechnung zeigt, daß die hierdurch bewirkten Abweichungen unter Umständen experimentell beobachtbar sein mußten. Leider sind in den Berechnungen verschiedene Fehler enthalten, so daß die erhaltenen Endformeln unrichtig und daher auch die daraus gezogenen Schlußfolgerungen hinfällig sind. *Fürth (Prag).*

Bourgin, D. G.: The velocity of sound in an absorptive gas. Physic. Rev., II. s. **42**, 721—730 (1932).

Fortsetzung von zwei früheren Arbeiten des Verf. [Philos. Mag. **7**, 821 (1929); Physic. Rev. **34**, 521 (1929)]. Die Schallgeschwindigkeit ändert sich für Ultraschallwellen, sobald die Schwingungsperiode vergleichbar mit der Lebensdauer der inneren Zustände der Moleküle wird. Früher wurde schematisch eine mittlere Lebensdauer für alle inneren Zustände eingeführt. In Anbetracht der genauen experimentellen Resultate von Kneser für CO_2 [Ann. Physik **11**, 761, 779 (1931)] werden hier Entwicklungen „zweiter Ordnung“ gegeben, d. h. es werden drei verschiedene Lebensdauern in Betracht gezogen. Es sollen vor allem die Schwingungsübergänge im Molekül die Änderung der Schallgeschwindigkeit verursachen. (Vgl. dies. Zbl. **3**, 281.)

F. Zernike (Groningen).

Wolodkewitsch, N.: Untersuchungen über die „elektrische Diffusion“ der Ionen in Gasen unipolarer Beladung. Ann. Physik, V. F. **16**, 431—467 (1933).

Unter „elektrische Diffusion“ wird die Wanderung der Ionen in einem gasgefüllten Raume verstanden, die infolge der elektrostatischen Abstoßung stattfindet, wenn nur Ionen gleichen Vorzeichens vorhanden sind. Die rechnerische Behandlung der elektrischen Diffusion wird auf Grund elektrostatischer Formeln durchgeführt, wobei die Bewegung der Ionen durch einen Parameter, die Ionenbeweglichkeit gekennzeichnet wird. Verf. behandelt den kugelsymmetrischen Gasstrom und die Strömung durch Röhren. — Ferner wird eine experimentelle Untersuchung der elektrischen Diffusion durchgeführt.

Eisenschitz (Berlin).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Reflection and refraction of seismic waves in a stratified body. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo **10**, 805—816 (1932).

Nach Suzukis Beobachtungen zeigt der scheinbare Einfallswinkel der longitudinalen Wellen an der Oberfläche eine Abhängigkeit von der Periode. Die theoretische Behandlung in vorliegender Arbeit zeigt, daß dieses tatsächlich auftreten muß; wenn die Wellenlänge der einfallenden Störung klein ist im Vergleich zur Dicke der auflagernden Schicht, ist der scheinbare Auftauchwinkel klein. Die Bewegung eines Punktes an der Oberfläche erfolgt in diesem Falle in Ellipsen. Die kleinere Achse fällt in die Horizontale. Bei großen Wellenlängen wird diese Achse nahezu Null. — Trifft eine irgendwie gestaltete Störung auf die Oberfläche, so scheint das Oberflächenteilchen ähnliche Bewegungen auszuführen, als treffe ein sinusförmiger Wellenzug auf. *Brockamp.*

Arakawa, H.: On the influence of gravity on surface (Rayleigh and Love) waves treated in cylindrical co-ordinates. Geophys. Mag. **5**, 237—244 (1932).

An rotationssymmetrischen Lösungen der Elastizitätsgleichungen (Kompressibilität vernachlässigt) wird der Einfluß der Schwere auf Rayleigh- und Love-Wellen untersucht. Bromwichs Resultat wird bestätigt, wonach dieser Einfluß bei Rayleigh-Wellen unmerklich ist, auch im Falle einer (zweifach) geschichteten Kruste; Love-Wellen unterliegen nicht dem Einfluß der Schwere. *Ertel (Potsdam).*

Alessandri, C.: Sulla velocità apparente di propagazione superficiale dei terremoti in rapporto con la profondità ipocentrale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 141 bis 146 (1933).

Nagaoka, Hantaro: The world-shaking earthquakes and the variation of latitude. II. Proc. Imp. Acad. Jap. **8**, 475—477 (1932).

Verf. führt seine Gedankengänge (siehe dieses Zbl. **5**, 191) über Polschwankungen, Änderungen der Trägheitsmomente des Erdkörpers durch Magmenverlagerungen und Erdbeben weiter aus, lokale Beben können nicht so starke Längenschwankungen herbeiführen wie beobachtet sind, und er kommt zu dem Schluß, daß die Auslösung eines Erdbebens ein sehr komplizierter Vorgang ist, verursacht durch Magmenverlagerung usw. im Erdinnern, der sich meistens schon lange vor Auslösung des Bebens an Niveauänderungen und Längenschwankungen bemerkbar macht. *Brockamp.*

Schlomka, T.: Zur physikalischen Theorie des Erdmagnetismus. (Physik. Inst., Univ. Greifswald.) (10. Tag. d. Deutsch. Geophys. Ges., Leipzig, Sitzg. v. 3.—6. X. 1932.) Z. Geophys. **9**, 99—109 (1933).

In the earlier part of the paper, a brief criticism is given of certain hypotheses that have been proposed to account for the earth's magnetic field. The theory that this is due to permanent magnetization is dismissed. Stream-theories, which propose an east-to-west electric current system as the cause, are also rejected, (a) because of the absence of free electrons in the earth's crust, (b) because of any apparent force promoting such currents, and (c) because an estimate of the heat generation arising from the electrical resistance to such current flow is regarded as excessive. The later part of the paper is concerned with rotational theories of the earth's magnetism; a tabular summary of previous theories of this type is given, indicating the reasons for their rejection. The author propounds a new theory of this type, depending on assumed differences between the forces $(1 + \alpha) e_+ e_+ / r^2$, $(1 + \beta) e_- e_- / r^2$, and $e_+ e_- / r^2$, by which positive and positive, negative and negative, positive and negative charges action are another. On this assumption, by suitable choice of $\alpha + \beta$, the gravitational attraction between bodies can be explained; also there results a radial electric polarization in any spherical body. It is stated that, if the sphere be in rotation, a magnetic field of the doublet type will arise, and the earth's magnetic field can be thus accounted for by suitable choice of $\beta - \alpha$. A detailed account of the new theory is to be published in Gerland's Beitr. Geophys. *S. Chapman (London).*

Schlomka, Teodor: Gravitation und Erdmagnetismus. I. Gerlands Beitr. Geophys. 38, 357—406 (1933).

Nach einer kurzen Zusammenstellung der bisher aufgestellten Rotationstheorien des Erdmagnetismus setzt Verf. die Grundzüge seiner im folgenden näher entwickelten Theorie auseinander. Den Kernpunkt der ganzen Theorie bildet die Annahme, daß die wirksamen Kräfte zwischen 2 Protonen in einer bestimmten Entfernung verschieden sind von den entsprechenden Kräften zwischen 2 Elektronen in gleicher Entfernung und beide wieder verschieden von den entsprechenden Kräften zwischen einem Proton und einem Elektron, oder formelmäßig:

$$\mathfrak{R}_{++} = (1 + \alpha) e_+ e_+ / r^2, \quad \mathfrak{R}_{--} = (1 + \beta) e_- e_- / r^2, \quad \mathfrak{R}_{+-} = 1 e_+ e_- / r^2.$$

Die Ungleichheit dieser Kräfte bewirkt bei einem elektrisch neutralen Körper eine innere Ladungsverteilung, die bei Rotation des Körpers ein äußeres Magnetfeld erzeugt. Aus derselben Ursache wirken zwischen ladungslosen Körpern elektrische Differenzkräfte (Gravitation). Der Grundgedanke der ganzen Arbeit ist nun der, daß man die Möglichkeit hat, die Zahlenwerte von α und β zu bestimmen, indem man den Erdmagnetismus und die Erdgravitation als Folgeerscheinungen der obenerwähnten Grundannahmen erklärt. Die Gravitation liefert für $\beta + \alpha = -0,80 \cdot 10^{-36}$, der Erdmagnetismus gibt für $\beta - \alpha = +0,13 \cdot 10^{-18}$, womit α und β selbst bestimmt sind. Der Umfang der Arbeit macht es unmöglich, hier auf weitere Einzelheiten näher einzugehen. Es sei nur erwähnt, daß eine sehr ausführliche, kritische Behandlung der früheren Gravitationstheorien, besonders der elektrischen, gegeben wird. Ferner sind in großer Vollständigkeit die Formeln für das elektrische Feld rotierender, geladener Kugeln angegeben für ruhenden und mitrotierenden Beobachter. Zum Schluß wird kurz auf Prüfungsmöglichkeiten der hier vorgeschlagenen Theorie eingegangen sowie einige Folgerungen kritisch beleuchtet.

G. Fanslau (Berlin).

King, Louis V.: On the flow of electric current in semi-infinite stratified media. Proc. Roy. Soc. London A 139, 237—277 (1933).

Im Hinblick auf die Vierpunktmethode der Geoelektrik wird das Potential eines an der Oberfläche eines unbegrenzten Halbraumes befindlichen Quellpunktes untersucht bei Beschränkung auf den Spezialfall, daß das isotrope Medium planparallel zur ebenen Oberfläche geschichtet ist. Falls die oberen Schichten nach unten hin durch ein sehr gut oder sehr schlecht leitendes unbegrenztes Medium begrenzt sind, erweist es sich als zweckmäßig, das Potential V durch das Strömungspotential ψ mittels der Gleichungen

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r}; \quad u_z = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

zu ersetzen, in denen u_r und u_z die radiale bzw. axiale Komponente der Stromdichte sind. Man erhält dann beispielsweise statt der in Zylinderkoordinaten geschriebenen Laplaceschen Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0,$$

deren Integration bei konstantem spezifischem Widerstand ϱ durch Einführung von $\psi = R(r) \cdot Z(z)$ in bekannter Weise zu Besselschen Funktionen führt. Für den Oberflächengradienten ϱ/ϱ_s ergeben sich auf diese Weise stark konvergierende Reihen. Ganz allgemein ist das Potential an der Oberfläche (surface)

$$V_s = \frac{J_0}{2\pi} \int_0^\infty F(\lambda, \varrho, \varrho', \dots, h, h', \dots) \cdot J_0(\lambda r) d\lambda,$$

wobei sämtliche Bestimmungsstücke des Mediums wie Schichtdicke, Schichtzahl, spez. Widerstand usw. in der „charakteristischen Funktion“ $F(\lambda, \varrho, \varrho', \dots, h, h', \dots)$ enthalten sind, deren Entwicklung in eine stark konvergente Reihe vorgenommen wird.

Eine Anwendung des Hankelschen Inversionstheorems ermöglicht es umgekehrt, die charakteristische Funktion $F(\lambda)$ durch Integration der Feldkurven zu gewinnen, was praktische Bedeutung besitzt. Eine Reihe Sonderfälle wird durchdiskutiert, und viele theoretisch interessante Entwicklungen werden gegeben. (Vgl. hierzu Ehrenburg und Watson, dies. Zbl. 3, 188.) *J. N. Hummel* (Göttingen).

McNish, A. G.: Sources of errors in the determination of the potential gradient of the earth's electric field. *Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr.* 37, 439—446 (1932).

Der luftelektrische Potentialgradient wird gewöhnlich abgeleitet aus der Potentialdifferenz zwischen einem Kollektor und der Erde. Der Einfluß verschieden verteilter Raumladungen auf die Messungen wird eingehend diskutiert, wobei berücksichtigt wird, daß sich die Oberflächenladung der Erde infolge der Induktion durch die Raumladung lokal ändert. Daran schließt sich eine Kritik an dem üblichen Rückschluß von Potentialgefälle-Schwankungen auf Raumladungen. Außer horizontalen, unendlich ausgedehnten Raumladungen werden solche von endlicher Kugel- und Zylinderform betrachtet. Die Faktoren, mit denen Potentialgefälle-Registrierungen auf die freie Ebene reduziert werden, können um mehrere Prozent verfälscht werden, wenn der Einfluß der Raumladungsdichte nicht beachtet wird. *J. Bartels* (Eberswalde).

Gray, Marion C.: Mutual impedance of long grounded wires when the conductivity of the earth varies exponentially with depth. *Physics* 4, 76—80 (1933).

Diese Größe war bisher unter verschiedenen Annahmen über die Bodenbeschaffenheit berechnet worden. Vorliegende Arbeit fügt zu diesen Annahmen eine neue hinzu, welche zu einer integrierbaren Differentialgleichung führt. Das Ergebnis besteht in einem unendlichen Integral mit Integranden, die aus Besselschen Funktionen zusammengesetzt sind. Eine Reihenentwicklung nach Ausdrücken, für die selber auch wieder Reihen abgeleitet werden, erlaubt mittels beigefügter Diagramme eine numerische Auswertung des Ergebnisses. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Petrowsky, A.: Über die Anwendung der elektromagnetischen Wellen zur Bodenforschung in der USSR. *Gerlands Beitr. Geophys.* 3, Erg.-H., 149—204 (1933).

Bartels, J.: Überblick über die Physik der hohen Atmosphäre. (*Heinrich Hertz-Ges., Bad Nauheim, Sitzg. v. 21. IX. 1932.*) *Elektr. Nachr.-Techn.* 10, Sonderh., 1—40 u. H. 2, 59—60 (1933).

This is a valuable wide survey of upper-atmospheric physics, giving a concise review of our varied sources of information concerning the state and phenomena of the air at high levels. The account starts with the direct measurements made by means of small balloons, up to 30 km., and with observations of high clouds (up to 80 km.). The other topics, in order, are the geometrical relations of radiation falling upon the earth, the light of the night sky, meteors, ozone, abnormal sound-propagation, the composition and pressure of the air at different levels, and, with special fulness, the earth-magnetic evidence bearing upon the upper atmosphere and upon solar and terrestrial relationships; the concluding sections deal with the ionizing and dissociating influence of monochromatic radiation absorbed in the atmosphere, and with an account of Chapman's discussion of upper air phenomena [*Proc. Roy. Soc. London (A)*, 132, 353—374 (1931); this Zbl. 3, 189]. A particularly useful feature of the paper is its extensive bibliography. *S. Chapman* (London).

Ertel, H.: Über die Bewegung von Elektronen in inhomogenen Magnetfeldern. *Gerlands Beitr. Geophys.* 38, 142—146 (1933).

Es wird folgender Satz aufgestellt: In einem beliebigen Magnetfeld bewegt sich ein Elektron derart, daß der Vektor seiner absoluten (d. h. auf ein Inertialsystem bezogenen) Geschwindigkeit relativ zu einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{e}{m} \cdot \mathfrak{H}$ rotierenden Koordinatensystem konstant bleibt. Dabei ist e die elektromagnetisch gemessene Ladung und m die Masse des Elektrons; \mathfrak{H} bedeutet die Magnetfeldstärke an dem Orte, an dem sich das Elektron jeweils befindet. Der Satz wird auf vekto-

riellem Wege bewiesen, an der bekannten Spiralbewegung eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld näher erläutert und zur graphischen Konstruktion der Elektronenbahn in einem speziellen inhomogenen Magnetfeld (Äquatorialebene eines entfernten magnetischen Dipols) benutzt.

Schlomka (Greifswald).

Störmer, Carl: Über die Bahnen von Elektronen im axialsymmetrischen elektrischen und magnetischen Felde. *Ann. Physik*, V. F. 16, 685—696 (1933).

Aliverti, G.: Le misure di radioattività atmosferica con il metodo dell'effluvio. *Nuovo Cimento*, N. s. 9, 313—327 (1932).

Experimentelles Material über die Radioaktivität der Erdatmosphäre. *Guth*.

Proudman, J.: Note on the free tidal oscillations of a sea with slow rotation. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 35, 75—82 (1933).

In 1903 the late Lord Rayleigh investigated the free oscillations of a slowly rotating mechanical system whose configuration can be specified by a finite number of Lagrangian coordinates; also, by using a certain mechanical principle, he obtained some results, now known to be incorrect, on the free tidal oscillations of a rectangular sea of uniform depth. In the present paper it is shown that the principle used by Rayleigh is valid, and that the error arose in his method of applying it. *S. Chapman*.

Stenij, S. E.: Zur Theorie der Wasserschwingungen in einem begrenzten Meeresbecken mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses vom Luftdruck. *Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math.* 6, Nr 16, 1—79 (1932).

Von den Wasserbewegungen wird ähnlich wie in der Gezeitentheorie vorausgesetzt, daß die horizontale Verschiebung in jeder Vertikalen in jedem Augenblick die gleiche ist. Der erste Teil der Arbeit enthält eine allgemeine Darstellung der Theorie der betrachteten Schwingungserscheinungen für beliebige Form des Beckens unter Vernachlässigung der Wirkung der Erdrotation. Der Fall der Resonanz wird mitberücksichtigt. Denn im vorliegenden Problem wirkt die erregende Kraft (Luftdruckänderung), anders als in der Gezeitentheorie, nur eine kurze Zeit, so daß also auch im Falle der Resonanz die Schwingung nicht so groß zu werden braucht, daß die Voraussetzungen ungültig werden, unter denen die Bewegungsgleichungen aufgestellt wurden. Andererseits ist dieser Fall natürlich von besonderem Interesse, etwa zu der Erklärung besonders großer Hochwässer an der finnischen Küste, wenn ein Tiefdruckgebiet über die Ostsee wandert. Während bei der Untersuchung der Gezeiten wegen des periodischen Charakters der Gezeitenkräfte die Zerlegung nach Fourierreihen der natürliche Weg ist, würde er für die Berechnung der vom Luftdruck erzeugten Schwingungen einen Umweg bedeuten. Deshalb gibt der Verf. im zweiten Teil der Arbeit für den eindimensionalen Fall eine Methode an, die gestattet, die von den Luftdruckänderungen verursachten Schwingungen direkt ohne die Zerlegung in Fourierkomponenten zu berechnen. Sie stellt eine Verallgemeinerung der von d'Alembert gegebenen Methode für die homogene Saite mit festen Endpunkten dar auf den Fall einer inhomogenen Saite mit allgemeineren Randbedingungen und einer schwingungserzeugenden Kraft. Ausgehend von dem Fall eines Beckens mit konstantem Querschnitt läßt sich der allgemeinere Fall durch sukzessive Approximationen lösen. Auch der Einfluß der Reibung kann in erster Näherung in Rechnung gezogen werden. Numerische Anwendungen sollen später gegeben werden.

Haurwitz (Cambridge, Mass.).

Kodaira, Yoſio: Über die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre. *Geophys. Mag.* 5, 187—222 (1932).

Integration der atmosph. Bewegungsgleichungen

$$c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -\alpha g R^2 (T - T_0) \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x} + \kappa \Delta u + 2\varepsilon v, \dots, \dots,$$

unter den Annahmen: $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$, $p = p_0(1 + v)$, $T_0 = T_0(r)$, $\Delta T(\vartheta, \lambda, r) = 0$ (p, T = Druck, Temperatur, c = Newtonsche Schallgeschwindigkeit, α = Ausdehnungskoeffizient der Luft, g = Schwere an der Erdoberfläche ($r = R$)); bezüglich der Einzelheiten muß wegen der umständlichen Rechnungen auf die Original-

arbeit verwiesen werden. Die Lösung stimmt in den Hauptpunkten mit den Resultaten A. Oberbecks (S.-B. Berlin 1888) überein. *Ertel (Potsdam).*

Arakawa, H.: On the influence of topography on the microbarometric oscillations. Geophys. Mag. 5, 223–236 (1932).

Im Anschluß an eine Diskussion der im Krater des Mount Huzi (Japan, 3724 m) beobachteten mikrobarometrischen Oszillationen, die u. a. auch Perioden enthalten, wie sie Lambs Theorie für die Eigenschwingungen einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem kreisförmigen Becken vom Profil $h = h_0(1 - r^2/a^2)$ ergibt, wird unter vereinfachten Annahmen (Potentialströmung, inkompressible Flüssigkeiten) die Möglichkeit des Auftretens mikrobarometrischer Oszillationen infolge topographischer Bedingungen erörtert. *Ertel (Potsdam).*

Hidaka, Koji: Zur Integration der verallgemeinerten Austausch-Gleichung. Geophys. Mag. 5, 327–330 (1932).

Die Austauschgleichung
$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \frac{\partial s}{\partial z} \right]$$

wird mit folgendem Potenzgesetz für den Austauschkoeffizienten:

$$A(z) = az^p \quad (p < 1)$$

und den Randbedingungen: $s = 0$ für $t = 0, z > 0$; $s = 1$ für $z = 0, t > 0$; $\lim_{z \rightarrow \infty} s = 0$, durch

$$s(z, t) = 1 - \Phi \left(\frac{1}{2-p} \cdot \frac{z^{1-p/2}}{\sqrt{at}}; p \right)$$

gelöst. Für die Funktion

$$\Phi(x; p) = \frac{2}{\Gamma \left(\frac{1-p}{2-p} \right)} \int_0^x y^{-\frac{p}{2-p}} e^{-y^2} dy$$

wird für große x noch die Entwicklung

$$\Phi(x; p) = 1 - \frac{x^{-\frac{2}{2-p}} \cdot e^{-x^2}}{\Gamma \left(\frac{1-p}{2-p} \right)} \left[1 - \frac{1}{(2-p)x^2} + \frac{1 \cdot (3-p)}{(2-p)^2 x^4} - \frac{1 \cdot (3-p)(5-p)}{(2-p)^3 \cdot x^6} + \dots \right]$$

abgeleitet.

H. Ertel (Potsdam).

Watanabe, Satoshi: The equation of motion of a viscous fluid accompanied by the „microgyrostatic field“. Geophys. Mag. 5, 173–181 (1932).

Jedes Volumelement $d\tau$ einer mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} strömenden zähen Flüssigkeit soll eine große Anzahl rasch rotierender Elementarteilchen (Drehimpuls $= \mathfrak{H}$) enthalten. Infolge des „mikrogyrostatistischen“ Vektorfeldes $\mathfrak{N} d\tau = \sum \mathfrak{H}$ erweitern sich die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen wie folgt:

$$\rho \left(X - \frac{dv_x}{dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} - \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} v_x) + \frac{\partial (\mu, v_y)}{\partial (y, x)} + \frac{\partial (\mu, v_z)}{\partial (z, x)} + \frac{1}{4} \operatorname{rot}_x [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathfrak{N}],$$

da die gemischten Komponenten des Spannungstensors nun die Werte

$$X_y = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{4} [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathfrak{N}]_z, \quad Y_x = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{4} [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathfrak{N}]_z$$

usw. annehmen (für die Normalspannungen bleiben die klassischen Ausdrücke bestehen). Der mikrogyrostatistische Zusatzterm ergibt die von Sakakibara (Geophys. Mag. 1, 130; 2, 139) zur Erklärung gewisser atmosphärischer Bewegungen eingeführte transversale Reibung ($z =$ vertikale Koordinate):

$$R_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad R_y = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right),$$

wenn $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} = 0$ und $\frac{1}{4} N_z = \nu$ gesetzt wird.

H. Ertel (Potsdam).

Arakawa, H.: On wind-vane of the R. A. E. pattern. Geophys. Mag. 4, 53—59 (1931).

Theoretische Untersuchung über die vom Royal Aircraft Establishment (South Farnborough) konstruierte Windfahne [R. Glazebrook, A Dictionary of Applied Physics 3, 508 (1923)]; nach Arakawa stellt diese Fahne wohl die Periode der Windschwankungen, nicht aber Amplitude und Phase derselben richtig dar. *Ertel.*

Arakawa, H.: On a hydrodynamical problem associated with a splayed vane. Geophys. Mag. 4, 157—162 (1931).

Neue Berechnung der auf eine Windfahne mit gespreizten Flügeln wirkenden Windkraft mittels des Satzes von Schwarz-Christoffel über konforme Abbildung eines konvexen Polygons auf eine Halbebene. *Ertel (Potsdam).*

Sanuki, M.: Note on the theory of splayed vane. Geophys. Mag. 4, 163—165 (1931).

Ableitung einer zur Koeffizientenbestimmung dienenden Gleichung. *Ertel.*

Savur, S. R.: The effect of the Indian mountain ranges on air motion. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 7, 389—392 (1932).

Gegen die Arbeit von S. K. Banerji, The effect of the Indian mountain ranges on the configuration of the isobars [Indian. J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 4, 477—502 (1930)] werden drei Einwände erhoben; sie betreffen den Einfluß der Erdrotation auf die durch Gebirgszüge modifizierten Luftströmungen, die Windrichtung und Geschwindigkeit in bezug auf ein instantanes raumfestes Koordinatensystem und die Übereinstimmung der Stromlinien mit den Isobaren bei stationärer Bewegung. *H. Ertel (Potsdam).*

Banerji, S. K.: The effect of the Indian mountain ranges on air motion. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 7, 411—425 (1932).

Die vorstehenden Einwände Savurs (vgl. vorst. Ref.) werden (als auf Mißverständnissen auf Seiten Savurs beruhend) aufgeklärt. *H. Ertel (Potsdam).*

Frisch, Karl: Die Veränderungen der klimatischen Elemente nach den meteorologischen Beobachtungen von Tartu 1866—1930. Acta et Comment. Univ. Tartu A 23, Nr 5, 1—11 (1932).

Geodäsie:

Kerl: Über die Ansermetsche Lösung der Aufgabe des Snellius. Allg. Vermessg.-Nachr. 45, 113—118 (1933).

Verf. teilt zunächst den von Tienstra (Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde 1926) gegebenen einfachen und eleganten Beweis der von Ansermet (Le Problème de Snellius. 1912) gefundenen neuen Lösung der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens nach drei Festpunkten mit. Bei der Ansermetschen Lösung ist nicht allein, wie bei allen anderen Lösungen, der „gefährliche Kreis“, sondern insbesondere auch noch die „gefährliche Gerade“ zu beachten. Im letzten Falle treten unbestimmte Verhältnisse auf. Verf. veröffentlicht einen auf einfachen trigonometrischen Sätzen beruhenden Beweis der Ansermetschen Lösung der Aufgabe des Rückwärtseinschnitts.

Schmehl (Potsdam).

Walek, Karl: Anwendung der Vektorrechnung auf die Snelliussche Dreiecksaufgabe. Oesterr. Z. Vermessgswes. 31, 1—10 (1933).

Es wird zunächst eine einfache vektoralgebraische Lösung des ebenen Rückwärtseinschnitts vorgeführt. Der eine der unbekannten Winkel ergibt sich aus der Schlußformel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin(\beta + \nu) - \frac{c}{a} \sin \nu}{\cos(\beta + \nu) + \frac{c}{a} \operatorname{tg} \mu}.$$

Hierbei sind μ und ν die am zu bestimmenden Punkt gemessenen Winkel, β der Winkel zwischen den gegebenen Seiten a und c . — In einer zweiten Lösung desselben Problems werden auf vektoranalytischem Weg mit Hilfe der Gleichung zweier Pothenotscher Kreise Formeln zur direkten Berechnung der Koordinaten des gesuchten Punktes abgeleitet. Ein Zahlenbeispiel illustriert die zweite Lösung. *R. Finsterwalder.*

Schumann, Richard: Untersuchung über den vektorischen Ausgleich von Dreiecksnetzen. III. Mitt. S.-B. Akad. Wiss. Wien **141**, 583—599 (1932).

In einer früheren Arbeit [S.-B. Akad. Wiss. Wien **139**, 41 (1930)] hatte der Verf. gezeigt, daß die Möglichkeit besteht, bei der Landesvermessung Dreiecksseiten unmittelbar zu messen. Die vorliegende Untersuchung behandelt den vektorischen Ausgleich solcher Zentralsysteme, die durch Streckenmessung allein festgelegt sind. Zunächst wird der Ausgleich eines Liniensystems, in dem lediglich n Randseiten s und n Zentralstrahlen r gemessen sind, allgemein vektorisch durchgeführt. Die Ausdrücke für die berechneten Streckenverbesserungen ds und dr enthalten hierbei noch die \sin und \cos der Winkel des Systems. Die gewonnenen Formeln werden an einem von L. Krüger gegebenen Beispiel für $n = 4$ erläutert und erprobt. Abschließend wird die Frage behandelt, auf welche Weise zwecks Vereinfachung der Formeln und der numerischen Rechnung die ds und dr durch die gegebenen Strecken allein ausgedrückt werden können; für einige einfache Fälle wird die Lösung angegeben. *Schmehl* (Potsdam).

Förstner, Gustav: Ausgleichung von Polygonzügen. Z. Vermessgswes. **62**, 49—64 u. 101—114 (1933).

Rein theoretisch wird die Frage behandelt, ob und bis zu welchem Grade sich die Triangulierung IV. Ordnung durch längere Polygonzüge ersetzen läßt. Über die Form und die Genauigkeit dieser Züge werden zunächst keinerlei Voraussetzungen gemacht. Eine strenge Polygonzugausgleichung besitzt große Ähnlichkeit mit der bei einer trigonometrischen Punkteinschaltung auftretenden Ausgleichung. Bei der Ausgleichung von Einzelzügen wird der Maßstabsfehler nicht vor der Ausgleichung eliminiert, sondern durch die Ausgleichung berechnet. Neben der strengen Ausgleichung von Polygonzügen werden Näherungsverfahren untersucht. Ein allgemein gültiges Näherungsverfahren gibt es nicht. Der Anwendungsbereich einer Näherungsausgleichung ist vorzugsweise von der Form des Zuges, von dem Genauigkeitsverhältnis von Winkel- zu Streckenmessungen abhängig. Behandelt werden insbesondere die Ausgleichung von geradlinigen Zügen (bei schlechten Winkelmessungen) und die Ausgleichung von ausgebogenen Zügen (mit guten Winkelmessungen). Das bekannte Eggertsche Ausgleichungsverfahren darf nur bei einer mittleren Winkelmeßgenauigkeit angewendet werden. *Schmehl* (Potsdam).

Wolf, E.: Bestimmung der Neigung und Kantung von Steilaufnahmen aus Luftfahrzeugen. Bildmessg u. Luftbildwes. **8**, 10—20 (1933).

Hopfner, F.: Über einige aktuelle Fragen der physikalischen Geodäsie. Gerlands Beitr. Geophys. **38**, 309—320 (1933).

Verf. wendet sich gegen die Einwendungen, die von K. Jung [Zur Abschätzung von Geoidundulationen und Abplattung. Gerlands Beitr. Geophys. **36** (1932); dies. Zbl. **4**, 430] und W. Heiskanen (Der heutige Stand der Isostasiefrage. Ebenda) gegen eine Reihe von Arbeiten des Verf. sowie gegen eine Arbeit von F. Ackerl [Das Geoid I. Gerlands Beitr. Geophys. **29** (1931); dies. Zbl. **2**, 104] erhoben worden sind. Diese Arbeiten beziehen sich insbesondere auf die Berechnung der Geoidundulationen. Im einzelnen bespricht Hopfner: 1. Die von F. Ackerl verwendete Formel zur Abschätzung der Undulationen, 2. Ackerls Abplattungswert $1/276$ für das Niveausphäroid, 3. den Anwendungsbereich der Fayerschen Reduktionsformel (Freiluftformel), 4. die Randwertaufgabe der Geodäsie. *Schmehl* (Potsdam).

Gulatee, B. L.: Figure of the earth. Gerlands Beitr. Geophys. **38**, 426—430 (1933).

Es werden die Formeln von Stokes zur Berechnung der Undulationen auf dem von Stokes angegebenen Wege abgeleitet. Der Verf. schlägt in Anlehnung an Jeffreys vor, zur zahlenmäßigen Berechnung nach der Freiluftformel reduzierte Schwerkraftwerte zu verwenden. Er gibt zu, daß sich bei Verwendung isostatisch reduzierter Schwerkraftwerte die Undulationen eines deformierten Geoids ergeben würden; aber er glaubt, daß der Übergang von diesem Geoid zu dem in der Natur vorgegebenen leicht durchführbar wäre. Die hierzu erforderlichen Formeln werden nicht angeführt. *Hopfner*.